STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2007, nr.8

MODELAREA ACTIVITĂȚII BĂNCII COMERCIALE PRIN REȚELE PETRI HIBRIDE TEMPORIZATE

Igor ENICOV, Emilian GUȚULEAC*

Catedra Finanțe şi Bănci
**Universitatea Tehnică a Moldovei*

Dans l'article ci-dessous est présentée la possibilité de modélisation de l'activité bancaire par les Réseaux Pétri Hybrides Temporisés. Le contenu de l'article est axé sur une brève présentation de l'extension des Réseaux Pétri, qui peuvent être utilisés à la modélisation, la vérification et à l'évaluation des caractéristiques numériques de performance de la banque commerciale.

Introducere

Modelarea activității unei bănci comerciale constă în evaluarea rentabilității şi a riscului portofoliului investițional. În scopul modelării, banca comercială poate fi privită ca subsistem al sistemului economic. În acest mod, parametrii interni pentru sistem sunt externi pentru bancă şi va trebui să elaborăm un model care descrie interdependența dintre parametrii de intrare şi de ieşire ai subsistemului. Mărimea şi nivelul incertitudinii parametrilor de ieşire ai subsistemului sunt totalmente dependenți de parametrii respectivi de intrare.

În lucrarea de față prezentăm o abordare a modelării activității unei bănci comerciale, care are la punct de plecare faptul că funcțiile aplicațiilor paralele/distribuite se realizează prin acțiunile unor *procese cooperante* de prelucrare a datelor. În acest context, cooperarea presupune capacitatea proceselor de a comunica şi corelarea acțiunilor lor în vederea realizării sarcinilor comune.

Formularea unui *model matematic*, pentru un *sistem real*, este deci un aspect crucial şi mult mai dificil decât rezolvarea lui (printr-o metodă exactă sau aproximativă) şi interpretarea rezultatelor. În acest sens, una dintre posibilități poate fi, considerăm, folosirea rețelelor Petri, abreviat RP [1,9,11].

În prezent, RP au numeroase aplicații şi sunt utilizate în diverse domenii: inginerie, telecomunicații, modelarea proceselor de afaceri şi în învățământ, deoarece dispun de o reprezentare grafică foarte accesibilă, au o semantică bine definită care permite o analiză formală a comportamentului şi a proprietăților acestora [1,2,8].

Analiza RP marcate se face pe baza comportării lor dinamice sau pe baza structurii lor [2,11].

În continuare, vom prezenta succint unele extensii de rețele Petri care pot fi folosite la modelarea, verificarea şi evaluarea caracteristicilor numerice de performanță ale băncilor comerciale.

1. Rețele Petri generalizate temporizate

Teoria rețelelor Petri autonome tratează ordinea evenimentelor şi, în consecință, dinamica rețelei este considerată ca o succesiune de evenimente (de tranziții) restrânsă numai la considerente de logică (o tranziție se poate declanşa numai dacă este validată). În acest context întrebarea „cât timp consumă un eveniment?” nu se pune. Dar, pentru a răspunde la întrebări privind performanțele rețelei şi ale sistemului modelat cu rețeaua este necesar a lua în considerație timpul. Duratele se pot asocia cu locațiile şi cu tranzițiile pe următoarea cale:

- Durate asociate tranzițiilor: durate care separă începutul (consumul de jetoane din locațiile premergătoare) şi finalizarea acțiunii (producerea de jetoane destinate locațiilor următoare) corespunzătoare tranzițiilor. Aceste durate au primit numele de *timpi de acțiune*.
- Durate asociate cu locațiile: duratele minime pentru ca jetoanele să devină permanente într-o locație, înainte de a fi capabile a contribui la validarea (şi declanşarea) unei tranziții următoare. Aceste durate se numesc *timpi de aşteptare*.

Duratele de declanşare a tranzițiilor pot fi utilizate, de pildă, pentru a reprezenta timpul de transfer în cazul sistemelor bancare (unde tranziția reprezintă timpul uzual consumat pe o tranzacție). Timpii de aşteptare ar putea reprezenta duratele de transport (în cazul în care o locație reprezintă o rută sau un canal prin care comunică două procese) sau, la fel de bine, timpul minim de acces necesar accesibilității (cum ar fi timpul depozitării unei sume de bani, înainte de a-i retrage din cont). Timpii, duratele de aşteptare şi declanşare a tranzițiilor pot fi constante sau variabile, pot fi deterministe sau aleatorii.

Din punctul de vedere al puterii de modelare, aceste două tipuri de temporizări sunt echivalente [2]. În continuare, noi vom folosi RP temporizate, în care duratele de timp sunt asociate cu tranzițiile, deoarece specificul proceselor analizate sunt determinate de secvențe paralele de evenimente şi acțiuni concurente.

Modificarea modelului original al RP nu a avut loc doar în sensul simplificării reprezentării, foarte utilă în prevenirea exploziei taliei acesteia, ci şi în sensul extinderii sale. Extensiile RP corespund unor modele în care au fost adăugate reguli suplimentare, pentru a permite tratarea unui mai mare număr de aplicații şi modele. În unele cazuri, acest lucru s-a făcut doar prin extinderea sintaxei, fără o abatere semnificativă de la modelele de calcul de bază - maşina Turing. Cele mai semnificative modele ce extind puterea descriptivă a unui model de calcul de bază (numite şi modele neautonome) sunt RP temporizate, RP stochastice, RP continue şi RP hibride [2,8,11].

Vom prezenta aici o variantă de rețele Petri generalizate temporizate (RPGT), subiacente RP hibride temporizate [5], care pot fi folosite pentru modelarea şi evaluarea riscurilor funcționării băncilor comerciale.

Definiția 1. O rețea Petri generalizată temporizată, abreviat *RPGT*, este o structură redată de 11-tuplul:

$$RPG=<P,\ T,\ Pre,\ Post,\ Inh,\ Test,\ K_p, Pri,\ G,\ \tau,\ M_0>,$$

unde: - P este mulțimea nevidă de *locații*, $|P| = k$;

- T este mulțimea nevidă de *tranziții*, $|T| = n$ şi $P\cap T=\varnothing$;
- Pre, Inh şi $Test$: $P\times T\to \mu P$ sunt funcții de pondere ale arcelor: *Pre* este funcția de incidență înainte (arce directe de intrare la tranziție), *Inh* este funcția de inhibiție a tranzițiilor prin arce inhibitoare, iar *Test* este funcția ce descrie eventualele bucle ale unei rețele impure, adică $Pre(p,t) = Post(p,t)$. Un *test arc* este reprezentat prin arce întrerupte. *Post*: $T\times P\to \mu P$ este funcția de incidență înapoi (arce directe de ieşire din tranziție). Aceste funcții pot fi marcaj-dependente, adică ele sunt determinate de mulțimea multiseturilor μP ale lui P;

✓ $K_p : P \to IN \cup \infty$ este o funcție de capacitate a locațiilor, implicit ea este considerată nelimitată. *IN* este mulțimea numerelor întregi nenegative;

✓ $Pri : T\to IN$ este funcția de prioritate a tranzițiilor (implicit se consideră nulă);

✓ $G : T \times IN^{|P|} \to \{true,\ false\}$ este o funcție de *gardă*, care pentru orice $t\in T$ determină o funcție Booleană $g(t, M)$ în acest marcaj al rețelei. Dacă funcția este $g(t, M)$ = '*true*' şi t este validată de marcajul curent M, atunci această tranziție rămâne validată şi eventual ea poate fi declanşată, iar dacă $g(t, M)$ = '*false*' – ea nu mai poate fi declanşată, implicit funcția $g(t, M)$ = '*true*';

✓ $M : P\to IN$, $M = [m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_k]$ cu $m_i = M(p_i)$ este o funcție de marcare a locațiilor, iar M_0 este marcajul inițial al rețelei;

✓ $\tau : T \to IR_+$ este durata de declanşare a tranziției temporizate validate de marcajul curent. IR_+ este mulțimea numerelor reale nenegative. Tranzițiile $t_j \in T(M)$ validate de marcajul curent M, care au fost selectate pentru a fi declanşate, vor schimba acest marcaj după o durată τ_j. ■

Ponderile unor arce de diferite tipuri ale rețelei ce nu sunt menționate explicit sunt considerate respectiv că au valoarea 1. Capacitatea unei locații se consideră implicit nelimitată. De asemenea, dacă prioritățile de declanşare şi funcțiile de gardă ale unor tranziții t_j nu sunt menționate explicit, atunci se va considera că ele au respectiv următoarele valori: $Pri(t_j) = 0$ şi $g(t_j, M)$ ='*true*'.

În cele ce urmează vom folosi următoarele notații:

- ${}^\bullet t_j=\{p_i\in P : Pre(p_i,\ t_j)>0\}$ şi $t_j^\bullet=\{p_i \in P_d : Post(t_j, p_i)>0\}$ este, respectiv, mulțimea de locații la intrarea şi la ieşirea tranziției t_j;

- ${}^\circ t_j=\{p_i\in P : Inh(p_i,t_j)\}$ şi ${}^* t_j=\{p_i\in P : Test(p_i\ ,\ t_j)\}$ este, respectiv, mulțimea locațiilor de control prin arce inhibitoare şi test ale tranziției t_j ;

Definiția 2. (*Regula de declanşare a unei tranziții validate*). O tranziție t_j a *RPG* este *validată* de marcajul curent M, notat $t \in T(M)$, dacă şi numai dacă, independent de prioritatea sa, pentru ea este verificată următoarea funcție Booleană ce determină condiția sa de validare $cs(t_j, M)$:

$$ec(t_j, M) = (\bigwedge_{\forall p_i \in {}^\bullet t_j} (m_i \geq \mathrm{Pre}(p_i,t_j))) \ \&\ (\bigwedge_{\forall p_i \in {}^* t_j} (m_i \geq Test(p_i,t_j))) \ \&$$

$$(\bigwedge_{\forall p_i \in {}^o t_j} (m_i < Inh(p_i, t_j)))\&(g(t_j, M) = 1)\ \&\ (\bigwedge_{\forall p_n \in e_j^\bullet} ((K_p - m_n) \geq Post(p_n, e_j))$$

Tranziția $t_j \in T(M)$ este declanşată după durata τ_j, dacă *nu există* o altă tranziție t_k de o prioritate superioară $Pri(t_j) > Pri(t_k)$ pentru care sunt verificate, de asemenea, condițiile sale de validare $t_k \in T(M)$ şi temporizare. Declanşarea tranziției t_k din marcajul curent M conduce la un nou marcaj $M' = M - \mathrm{Pre}(\bullet, t_j) + \mathrm{Post}(\bullet, t_j)$, unde $\mathrm{Pre}(\bullet, t_j)$, $\mathrm{Post}(\bullet, t_j)$ sunt funcții induse de *Pre*, *Post* pe *P*. Faptul declanşării tranziției t_j din marcajul curent *M* este notat $M[t_j > M'$. ■

Notăm că atributele numerice ale rețelei pot fi marcaj-dependente.

2. Rețele Petri continue temporizate

Rețelele Petri continue temporizate au fost introduse de către *H.Alla* şi *R.David* în [2,3]. Particularitățile acestui tip de rețele constau în faptul că marcajul unei locații este un număr real pozitiv şi nu un număr întreg. Declanşarea tranziției se efectuează de către un flux continuu de fluid. Acest tip de rețele permite modelarea unor sisteme ce nu pot fi modelate prin rețele *RP* discrete şi permite obținerea unui model, apropiat în mod convenabil, când numărul de marcaje accesibile ale unei rețele *RP* discrete devine prea mare, ceea ce va constitui o limită a utilizării rețelelor *RP* pentru modelarea a astfel de procese.

O *rețea Petri continuă temporizată* este un model extins de rețele *RP*, în care numărul de jetoane în locațiile sale şi funcțiile de incidență respective sunt definite ca numere reale.

În continuare, prezentăm o extindere de rețele Petri continue temporizate (RCT).

Definiția 3. O rețea Petri continuă *T*-temporizată, abreviat *RCT*, este următorul 11-cuplu:

$$RCT = \langle P, T, Pre, Post, Inh, Test, K_p, Pri, G, V, M_0 \rangle,$$

unde definițiile obiectelor *P*, *T*, *Pre*, *Post*, *Inh*, *Test*, *Pri*, K_p, *Pri, G,* sunt, respectiv, similare celor pentru rețele *RP* discrete, cu excepția că funcțiile de incidență *Pre, Post, Inh* şi *Test* au valori reale;

- *V* este o aplicație a mulțimii de tranziții *T* ale rețelei *RCT* în mulțimea numerelor reale $R^+ \cup \{\infty\}$. Viteza $V(t_j) = V_j$ corespunde vitezei maxime de declanşare a tranziției t_j;

- M_0 este marcajul inițial al acestei rețele ce este redat de un vector de numere reale pozitive sau nule, care, de asemenea, poate fi notat $\vec{x}_0 = X(0)$, ştiind că $\vec{x}(\tau) = (x_1(\tau), \cdots, x_n(\tau))$, $n = |P|$ denotă marcajul curent al rețelei *RCGT* la momentul de timp τ.

O locație p_i având un marcaj nul poate valida o tranziție $t_j \in p_i^\bullet$. Pentru aceasta, este suficient ca locația singură să fie alimentată de către o tranziție $t_k \in {}^\bullet p_i$ la intrarea acestei locații.

Definiția 4. O locație p_i este *alimentată* la momentul de timp τ, dacă şi numai dacă există, cel puțin, o tranziție t_j în ${}^\bullet p_i$ care este validată.

O tranziție t_j este *validată* la un moment de timp τ, dacă toate locațiile $p_i \in {}^\bullet t_j$ satisfac, cel puțin, una din următoarele două condiții: (i) $m_i(\tau) > 0$; (ii) p_i este alimentată.

Spunem că tranziția este *puternic validată,* dacă toate locațiile din mulțimea ${}^\bullet t_j$ satisfac prima condiție. Ea este *slab validată* dacă nu corespunde acestei primei condiții. ■

Într-o rețea *RCT* o tranziție t_j, la care este asociată o viteză reală de declanşare $v_j(\tau) > 0$, este declanşată în mod continuu. Marcajul unei locații p_i, la momentul $\tau + d\tau$, este dedus din marcajul curent la momentul τ, folosind relația:

$$m_i(\tau + d\tau) = m_i(\tau) + \sum_{k=1}^{m} [Post(p_i, t_k) - \mathrm{Pr}\, e(p_i, t_k)] \cdot v_k(\tau) d\tau,$$

de unde obținem următoarea *relație fundamentală*:

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = C \cdot v(\tau),$$

unde *C* este matricea de incidență a rețelei *RCT*, iar $v(\tau)$ este vectorul viteză de declanşare a tranzițiilor respective la momentul τ, adică $v(\tau) = (v_1(\tau),..., v_m(\tau))$.

Din relația fundamentală este posibil a verifica diferite proprietăți interesante pentru rețele *RCT*. Unele din ele, astfel ca invarianții locațiilor sau invarianții tranzițiilor, sunt similari celor ai rețelelor *RP* discrete. Altele, ca, de exemplu, intervalele de funcționare şi grafurile de evoluție pentru rețele *RCT*, sunt specifice numai modelului continuu [2,3].

Rețelele *RCT* permit a modela în mod apropiat un sistem cu evenimente discrete. În acelaşi timp, ele permit a modela şi sisteme cu fluxuri continue de date (scurgerea şi/sau, de exemplu, melanjuri de fluide) fără necesitatea de a le discretiza. Mai mult, ele permit de a modela sisteme, unde mărimile parametrilor ce caracterizează natura acestor fluxuri poate fi foarte eterogenă. De exemplu, fluxuri de tranzacții bancare, gestiunea unui sistem de producție, care va lua în considerație numărul de piese, cererile respective (numere întregi prin natura lor) şi sume oarecare de bani (numere raționale ce depind de unitatea de măsură considerată). Ponderile de numere reale care pot fi asociate la arcele unei rețele *RCT* permit, de exemplu, de a „transforma" un număr de produse realizate într-o sumă de bani încasată, descrisă de declanşarea unei tranziții continue, a cărei viteză corespunde numărului de articole vândute pe o unitate de timp.

Pentru modelarea anumitor tipuri de sisteme, rețelele *RCT* cu viteze constante de declanşare a tranzițiilor sunt bine adaptate. Totuşi, ele pot fi extinse pentru a ține cont de viteze maxime de declanşare a tranzițiilor ce depind de timp şi de marcajul curent al rețelei, considerând astfel rețelele *RPT* cu automodificare, care interacționează cu mediul înconjurător al sistemului modelat cu acest tip de rețele.

Rețelele *RCT* sunt bine adaptate pentru modelarea unei funcționări permanente cu fluxuri de natură continue. Însă, într-un sistem bancar comercial procesele de funcționare sunt de natură discret-continue şi deseori pot interveni situații de disfuncțiuni: una sau mai multe resurse oarecare nu sunt disponibile şi atunci viteza maximă *V* respectivă devine nulă. Ocurența acestor evenimente duce la schimbarea bruscă a regimului de funcționare a rețelei, ceea ce este echivalent cu a avea brusc o altă rețea *RCT*.

Acest tip de situații poate fi modelat prin rețelele *RPG hibride generalizate temporizate*, abreviat *RHGT*, care va conține *locații şi tranziții continue* (numite în continuare *C-locații* şi *C-tranziții*) şi *locații şi tranziții discrete* (numite în continuare *D-locații* şi *D-tranziții*).

În continuare vom considera o extensie, numită *rețele Petri hibride temporizate.*

3. Rețele Petri hibride generalizate temporizate

Pentru a efectua o reprezentare formală a rețelei *RHGT*, vom considera din nou o rețea Petri generalizată discretă, autonomă. Fie tranziția t_j şi locația p_i sunt, respectiv, o tranziție şi o locație ale acestei rețele. Marcajul locației p_i, redat de un număr întreg de jetoane în această locație, este notat *mi*. Vom considera, de asemenea, un model de rețea asemănător, însă constituit astfel, încât mulțimea locațiilor şi tranzițiilor sunt separate în *două părți disjuncte*: fiecare locație şi fiecare tranziție poate fi sau discretă, sau continuă. Rețeaua astfel obținută este numită *rețea Petri hibridă*, unde marcajul locațiilor continue este un număr real, pe când marcajul locațiilor discrete este un număr întreg. Dacă toate nodurile rețelei sunt discrete, atunci *RHGT* degenerează într-o rețea Petri discretă *RPG* temporizată. Însă, dacă toate nodurile rețelei sunt continue, atunci *RHGT* degenerează într-o rețea *RCGT*.

Definiția 5. O *rețea Petri hibridă generalizată temporizată* marcată, abreviat *RHGT*, este cvadruplul $RHGT =< RPG,\ h, M_0, \vec{x}_0 >$ ce verifică următoarele condiții:

1) rețeaua *RPG* este o rețea Petri generalizată, în care ansamblul locațiilor *P* constituie o partiție $P = P_d \cup P_c$, $P_d \cap P_c = \varnothing$, unde P_d este ansamblul *D*-locațiilor discrete şi P_c este ansamblul *C*-locațiilor continue, iar ansamblul tranzițiilor *T* constituie o partiție $T = T_d \cup T_c$, $T_d \cap T_c = \varnothing$, unde T_d este ansamblul *D*-tranzițiilor discrete şi T_c este ansamblul *C*-tranzițiilor continue. Ansamblul arcelor *A*, determinate de funcțiile de incidență *Pre, Inh,* $Test : P \times T \to \mu P$ şi $Post : T \times P \to \mu P$; de asemenea, constituie o partiție $A = A_d \cup A_c$, $A_d \cap A_c = \varnothing$, astfel încât $A_d = (P_d \times T) \cup (T \times P_d)$ şi $A_c = (P_c \times T_c) \cup (T_c \times P_c)$;

2) aplicația $h : P \cup T \to \{D,\ C\}$, numită funcție hibridă, indică tipul fiecărui nod al rețelei, adică dacă el este de tip discret *D* sau de tip continuu *C*. În cazul în care $p_i \in P_d$ este o *D*-locație, atunci funcțiile de incidență respective $Pre(p_i, t_j)$ şi $Post(p_i, t_j)$, $Inh(p_i, t_j)$ şi $Test(p_i, t_j)$, $\forall t_j \in T$ primesc valori întregi nenegative, iar dacă $p_i \in P_c$ este o *C*-locație, atunci $\forall t_j \in T_c$ aceste funcții vor primi valori reale pozitive;

3) pentru $\forall h(p_i) = D$ şi $\forall h(t_j) = C$ funcțiile de incidență înainte *Pre* şi de incidență înapoi *Post* verifică relația $Pre(p_i, t_j) = Post(p_i, t_j)$;

4) marcajul curent $(M, \vec{x})$ al rețelei este determinat de vectorul numărului de jetoane $M = (m_i, p_i \in P_d)$ în *D*-locații şi de vectorul marcării continue $\vec{x} = (x_k, p_k \in P_c)$ a *C*-locațiilor. În starea inițială rețeaua are un marcaj inițial $(M_0, \vec{x}_0)$.

Fiecărei astfel de rețea *RHG* îi corespunde o matrice de incidență *W*:
$W = [W_{ij}]_{n \times m}$, unde $W_{ij} = Post(p_i, t_j) - Pre(p_i, t_j)$.

A treia condiție din definiție stabileşte faptul că un arc trebuie să lege o *C*-tranziție cu o *D*-locație, dacă un arc reciproc există. Aceasta permite asigurarea faptului că marcajul *D*-locațiilor trebuie să rămână totdeauna o valoare întreagă, oricare ar fi evoluția marcajelor ce se produc în rețea.

Pentru a deosebi în reprezentarea lor grafică *D*-locații de *C*-locații şi *D*-tranziții de *C*-tranziții şi a arcelor respective, vom folosi reprezentarea grafică din Figura 1 a primitivelor *RHGT*.

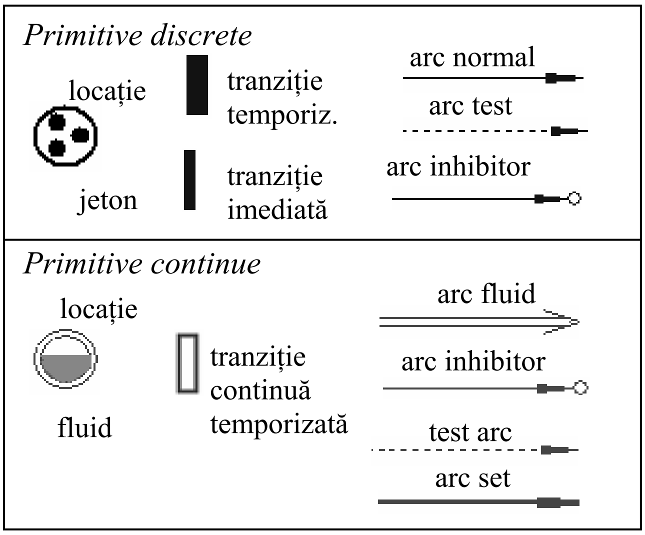

Fig.1. Primitivele rețelei RHG.

Marcajul unei *C*-locații este reprezentat de un număr real, cantitate de fluid, iar marcajul unei *D*-locații este reprezentat, de obicei, prin puncte negre, numite jetoane.

În continuare, pentru a distinge tranzițiile şi locațiile continue de cele discrete, vom nota prin $u_k \in T_C$ tranzițiile continue, iar prin $b_k \in P_C$ – locațiile continue.

Regulile de validare şi declanşare a tranzițiilor. O tranziție discretă $t_j \in T_D(M)$ este *validată* de marcajul curent *M* dacă este verificată următoarea expresie logică (condiția de validare $ec_d(t_j)$):

$$ec_d(t_j) = \Big(\bigwedge_{\forall p_i \in {}^{\bullet}t_j} (m_i \geq Pre(p_i, t_j))\Big) \,\&\, \Big(\bigwedge_{\forall p_k \in {}^{\circ}t_j} (m_k < Inh(p_k, t_j))\Big) \,\&\, \Big(\bigwedge_{\forall p_l \in {}^{*}t_j} (m_l \geq Test(p_l, t_j))\Big) \,\&$$
$$\Big(\bigwedge_{\forall p_n \in t_j^{\bullet}} ((K_p - m_n) \geq Post(p_n, t_j))\Big) \,\&\, \Big(\bigwedge_{\forall b_i \in {}^{\bullet}t_j} (x_i \geq Pre(b_i, t_j))\Big) \,\&\, \Big(\bigwedge_{\forall b_k \in {}^{\circ}t_j} (x_k < Inh(b_k, t_j))\Big) \,\&$$
$$\Big(\bigwedge_{\forall b_l \in {}^{*}t_j} (x_l \geq Test(b_l, t_j))\Big) \,\&\, \Big(\bigwedge_{\forall b_n \in t_j^{\bullet}} ((K_b - x_n) \geq Post(x_n, t_j))\Big) \,\&\, g(t_j, M).$$

De asemenea, o tranziție continuă $u_j \in T_C(M)$ este *validată* de marcajul curent *M* dacă este verificată următoarea expresie logică (condiția de validare $ec_c(u_j)$):

$$ec_c(u_j) = (\underset{\forall b_i \in {}^{\bullet}u_j}{\wedge}(x_i > 0)\ \&\ (\underset{\forall p_k \in {}^{\circ}u_j}{\wedge}(m_k < Inh(p_k, u_j))\ \&\ (\underset{\forall p_l \in {}^{*}u_j}{\wedge}(m_l \geq Test(p_l, u_j))\ \&\ (\underset{\forall b_k \in {}^{\circ}u_j}{\wedge}(x_k < Inh(b_k, u_j))\ \&\ (\underset{\forall b_l \in {}^{*}u_j}{\wedge}(x_l \geq Test(b_l, u_j))\ \&\ (\underset{\forall b_n \in u_j^{\bullet}}{\wedge}((K_b - x_n) \geq V_j \cdot Post(x_n, u_j))\ \&\ g(t_j, M)$$

O tranziție validată poate fi declanșată. Declanșarea unei *D*-tranziții t_j constă în a retrage $Pre(p_i, t_j)$ jetoane din fiecare locație p_i de intrare la tranziția t_j şi de a adăuga $Post(p_i, t_j)$ jetoane în fiecare locație de ieşire a acestei tranziții. Declanșarea unei cantități *r* a unei *C*-tranziții u_j retrage $r \cdot Pre(p_i, u_j)$ de fluid din fiecare locație b_i de intrare la tranziția u_j şi adăugă $r \cdot Post(p_i, t_j)$ fluid în fiecare din locațiile b_j de ieşire din u_j.

O tranziție discretă $t_j \in T_D(M)$ (continuă $u_j \in T_C(M)$) validată va *declanşa* dacă nu există o altă tranziție $t_k \in T_D(M)$ ($u_k \in T_C(M)$) validată ce are o prioritate mai mare.

Fie σ este o secvență de declanşări ale tranzițiilor şi $\overline{\sigma}$ este vectorul caracteristic asociat la σ. Dimensiunea vectorului $\overline{\sigma}$ este egală cu numărul *k* de tranziții ale rețelei. O componentă $\overline{\sigma}_j$ a vectorului $\overline{\sigma}$ reprezintă numărul de declanşări ale tranziției t_j în secvența de declanşări σ şi acest număr va fi notat $N_j = N(t_j)$. Dacă t_j este o *D*-tranziție, atunci N_j este un număr întreg, iar dacă t_j este o *C*-tranziție, atunci N_j este un număr real.

Marcajul accesibil *M* poate fi determinat din marcajul inițial M_0, prin declanşarea secvenței σ, $M_0[\sigma > M$, utilizând relația fundamentală [2]:

$$M = M + W \cdot \overline{\sigma}$$

Relația fundamentală a unei rețele *RHG* este identică cu relația fundamentală a unei rețele *RPG* discrete. Deci, putem prevede că toate proprietățile rețelelor *RG* discrete ce revin din această relație pot fi transpuse şi la rețelele *RHG*. În particular, rezultatele în ce constă invariantele de marcaj şi de declanşare sunt identice atât pentru o rețea *RHG*, cât şi pentru o rețea *RPG* discretă.

Definiția 6. O *rețea Petri hibridă generalizată temporizată* este cuplul $RHGT =< RHG,\ \theta,\ V >$, unde:

– *RHG* este o rețea Petri hibridă marcată, specificată în conformitate cu definiția 5, în care mulțimea tranzițiilor discrete T_D este partiționată astfel încât $T_D = T_\tau \cup T_0$, $T_D = T_\tau \cap T_0 = \varnothing$:

✓ T_τ este mulțimea tranzițiilor temporizate cu o durată de declanşare finită;

✓ T_0 este mulțimea tranzițiilor imediate cu o durată de declanşare nulă;

– $\theta : T \times \mu P \rightarrow IR+$ este funcția ce determină parametrul de temporizare a declanşării unei tranziții discrete validate $t \in T(M)$:

– dacă t este o tranziție temporizată, atunci $\theta(t, M) = d(t, M)$ este durata de declanşare a tranziției $t \in T_\tau(M)$ în marcajul curent *M*;

– dacă t' este o tranziție imediată, atunci $\theta(t', M)$ este ponderea acestei tranziții ce determină probabilitatea de declanşare $a(t', M) = \theta(t, M) / \sum_{t_k \in T_0(M)} \theta(t_k, M)$ a tranziției $t \in T_0(M)$ în marcajul curent *M*, care descrie un selector probabilistic de alegere liberă a tranzițiilor în conflict structural $t' \in {}^{\bullet}p$ relativ la locația *p*, astfel încât $0 \leq a(t', M) \leq 1$, $\sum_{(t' \in {}^{\bullet}p)} a(t', M) = 1$;

– $V : T_C \times \mu P \rightarrow IR_+$ este funcția ce determină viteza maximă de declanșare asociată la o *C*-tranziție continuă u_j, astfel încât nivelul de fluid al locației continue x_j se va schimba în mod continuu;

– μP este multisetul mulțimii locațiilor *P*, iar IR^+ este mulțimea numerelor reale nenegative. ■

Starea unei rețele *RHGT* este definită de către marcajul său. Pentru o rețea *RHGT* temporizată (hibridă sau nu) marcajul curent *M* se va descompune în $M = M^r + M^n$, unde M^r și M^n sunt, respectiv, *marcajul rezervat* și *marcajul nerezervat* al rețelei. Numai marcajul nerezervat M^n este luat în considerație pentru validarea tranzițiilor. Mai mult, vitezele de declanșare a *C*-tranzițiilor sunt deduse din acest marcaj nerezervat. O stare a rețelei *RHG* nu are o durată, fiindcă marcajul *C*-locațiilor variază în mod continuu. Totuși, există un interval de timp când marcajul *D*-locațiilor și vitezele de declanșare a *C*-tranzițiilor rămân constante.

Mulțimea marcajelor accesibile ale unei rețele *RHG* temporizate este inclusă în mulțimea de marcaje accesibile ale rețelei *RHG* autonome subiacente acestei rețele temporizate. Un marcaj curent $M(\tau)$ la momentul de timp τ este dedus din marcajul inițial *M*(0), folosind relația fundamentală:

$$M(\tau) = M(0) + W(\overline{\sigma}(\tau)) + \int_{u=0}^{\tau} v(u)du),$$

unde $M(\tau)$ este marcajul curent la momentul τ, iar *W* este matricea sa de incidență.

În această relație vectorul caracteristic $\overline{\sigma}(\tau)$ reprezintă numărul de declanșări ale fiecărei *D*-tranziții (interpretare discretă) între momentul inițial $\tau_0 = 0$ și momentul curent τ. Componentele asociate la *C*-tranziții sunt egale cu zero. Componentele vectorului de viteze $v(\tau)$ reprezintă vitezele de declanșare instantanee a *C*-tranzițiilor la momentul τ. Componentele vectorului $v(\tau)$ asociate la *D*-tranziții sunt egale cu zero. Această relație separă evoluția discretă de evoluția continuă. Ea reprezintă o traiectorie în spațiul discret-continuu al rețelei Petri hibride temporizate.

Analiza modelelor de rețele *RHG* temporizate ce descriu funcționarea unei bănci comerciale poate fi efectuată prin simularea vizuală a acestora folosind simulatorul VHNP tool [7].

Concluzii

Concepute să modeleze sisteme distribuite, în care concurența și paralelismul ocupă un loc central, rețelele Petri de diferite extensii au devenit în scurt timp model de referință la descrierea acestor tipuri de sisteme. Aplicațiile lor în domenii inginerești le-au propulsat în centrul atenției cercetătorilor.

Rețelele Petri autonome și extensiile lor prezintă, de asemenea, un mare interes datorită clarității de reprezentare a fluxului controlului într-un sistem cu activități interdependente. În același timp, teoria rețelelor Petri permite demonstrații riguroase ale comportării sistemelor descrise prin acest formalism, cu respectarea unor proprietăți interesante din punctul de vedere al *cooperării proceselor concurente*: excluderea mutuală, sincronizarea etc. Pe baza proprietăților comportamentale ale rețelelor Petri se poate stabili, de exemplu, corectitudinea structurilor de execuție corespunzătoare în raport cu respectarea restricțiilor specificate.

Extensiile de rețele Petri sunt folosite pentru modelarea, validarea proceselor de funcționare și evaluarea performanțelor sistemelor și aplicațiilor paralele/distribuite. Îndată ce a fost elaborat modelul pentru un sistem dat, se poate efectua o analiză calitativă a coerenței funcționării acestui sistem.

Referințe:

1. Aalst W.M.P. The Applications of Petri Nets to Workflow Management // The Journal of Circuits, Systems and Computers. - 1998. - No8(1). - P.21-66.
2. Alla H., David R. De Grafcet aux reseaux de Petri. - Paris: Hermes, 1992. - 490 p.
3. Alla A., David H. Continuous and hybrid Petri nets // Journal of Systems Circuits and Computers. - 1998. - No8(1). - P.159-188.
4. Ajmone-Marsan M., Balbo G., Conte G., Donatelli S., Franceschinis G. An Introduction to Generalized Stochastic Petri Nets // Microelectronics and Reliability. - 1991. - Vol.31. - No4. - P.699 -725.
5. Guțuleac E. Evaluarea performanțelor sistemelor de calcul prin rețele Petri stochastice. - Chișinău: Tehnica Info, 2004. - 268 p.

6. Guţuleac E., Reilean A., Boşneaga C. VPNP-Software tool for modeling and performance evaluation using generalized stochastic Petri nets // Proceedings of the 6th International Conference on DAS 2002, 23-25 May 2002, Suceava, România, p.243-248.
7. Guţuleac E., Ţurcanu I., Gutuleac Em., Odobescu D. VHPN – software tool for visual discrete-continuous modelling of hybrid system using generalized timed differential Petri nets // Proceedings of the 8-th Intern. Conference on DAS2006, 25-27 May 2006, Suceava, România, p.255-262.
8. Enicov I., Guţuleac E. Modelarea şi evaluarea performanţelor băncii comerciale prin reţele Petri // Revista Ştiinţifică STUDIA UNIVERSITATIS. Vol.2. Universitatea de Stat din Moldova. - Chişinău, 2007, p.179-183.
9. Juncan T., Ţiplea F. L. Reţele Petri. - Iaşi: Editura Universităţii „Al.I. Cuza", 1995. - 189 p.
10. Li Hui-Fang, Fan Yu-Shun. Workflow Model Analysis Based on Time Constraint Petri Nets // Journal of Software. - 2004. - No15(1). - P.17-26.
11. Molloy M.K. Performance analysis using Stochastic Petri Nets // IEEE Trans. Comput. C-31. 1982. - No9. - P.913-917.

Prezentat la 11.10.2007