DESCRIEREA MATEMATICĂ A PROCESULUI DE USCARE A CĂTINII ALBE PRIN CONVECŢIE ŞI UHF

inginer Marcel RĂDUCAN,

dr. în tehnică, conf. univ. Natalia ŢISLINSCHI,

Universitatea Tehnică a Moldovei

Transferul de căldură şi de masă în procesul combinat de uscare (convecţia şi **UHF**) a produselor alimentare în celule sub formă geometrică de sfere coaxiale este studiat insuficient. Dacă admitem că fructul de cătină albă este compus din două sfere coaxiale, transferul de căldură în produs se va efectua datorită forţei motoare termice, transferului substanţei şi, de asemenea, sursei acţiunii interne de căldură. Transferul substanţei se datorează forţelor motoare termice şi de masă. Reieşind din aceste condiţii, vom avea următoarele ecuaţii (fig.1):

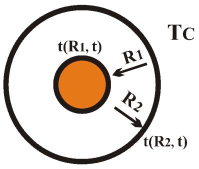

Fig. 1. Schema geometrică de bază a celulei de cătină albă

$$\frac{\partial(rt_1(r,t))}{\partial\tau} = a_{q_1}\frac{\partial^2(rt_1(r,\tau))}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon r_1' c_{T_1}'}{c_{q_1}}\cdot\frac{\partial[r\theta_1(r,\tau)]}{\partial\tau} + \frac{Qr}{c_{q_1}\rho_1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial r(\theta_1(r,\tau))}{\partial\tau} = a_{m_1}\frac{\partial^2(r\theta_1(r,\tau))}{\partial r^2} + a_{m_1}\delta_1\cdot\frac{\partial^2[rt_1(r,\tau)]}{\partial\tau^2} \quad (2)$$

Condiţia necesară pentru ecuaţiile 1 şi 2 - $0 \le r \le R_1$:

$$\frac{\partial(rt_2(r,\tau))}{\partial\tau} = a_{q_1}\frac{\partial^2(rt_2(r,\tau))}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon r_2' c_{T_2}'}{c_{q_2}}\cdot\frac{\partial[r\theta_2(r,\tau)]}{\partial\tau} + \frac{Qr}{c_{q_2}\rho_2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial r(\theta_2(r,\tau))}{\partial\tau} = a_{m_2}\frac{\partial^2(r\theta_2(r,\tau))}{\partial r^2} +] + a_{m_2}\delta_2\cdot\frac{\partial^2[rt_2(r,\tau)]}{\partial\tau^2} \quad (4)$$

Condiţia necesară pentru ecuaţiile 3 şi 4 - $R_1 \le r \le R_2$

în care:

a_q, a_m - coeficienţii de difuziune de temperatură şi de potenţial, în m²/s;

ε - criteriul transformării de fază;

r' - căldura latentă de vaporizare, în kJ/kg;

c'_T, c_q - capacitatea specifică masică, kg /(K·°M) şi cea termică, kJ/(kg·K);

Q - sursa internă de căldură, în Wt/m³;

ρ - densitatea părţii uscate a corpului umed, în kg/m³;

σ - coeficientul Sore pentru corpul umed, în K^{-1};

θ - potenţialul transferului de umiditate, în °M.

Condiţiile iniţiale:

$$t_1(r,0)=t_2(r,0)=T_{in};\quad \theta_1(r,0)=\theta_{1in};\quad \theta_2(r,0)=\theta_{2in} \tag{5}$$

Condiţiile de simetrie:

$$\frac{\partial t_1(0,\tau)}{\partial r}=\frac{\partial t_2(R_1,\tau)}{\partial r}=0 \qquad \frac{\partial \theta_1(0,\tau)}{\partial r}=\frac{\partial \theta_2(R_1,\tau)}{\partial r}=0 \tag{6}$$

$$t_1(R_1,\tau)=t_2(R_1,\tau); \qquad \Delta\theta_1(R_1,\tau)=\theta_2(R_1,\tau) \tag{7}$$

La încălzirea corpurilor capilaro-poroase, schimbul de căldură între suprafaţa corpului şi mediu efectuându-se prin convecţie, condiţiile de frontieră ale transferului de căldură şi de masă vor fi:

$$\lambda_{q_1}\frac{\partial t_1(R_1,\tau)}{\partial r}+(1-\varepsilon_1)r'_1 j_{m_1} = \lambda_{q_2}\frac{\partial t_2(R_1,\tau)}{\partial r} \tag{8}$$

$$\Delta j_{m_1} = j_{m_2}$$

$$j_{m_1} = \beta_1\left(\theta_1(R_1,\tau)-\theta_{1p}\right)$$

$$j_{m_2} = \beta_2\left(\theta_2(R_1,\tau)-\theta_{2p}\right)$$

Pe suprafaţa exterioară:

$$-\lambda_{q_2}\frac{\partial t_2(R_2,\tau)}{\partial r}+\alpha_2\left[T_s-t_2(R_2,\tau)\right]-(1-\varepsilon_2)r'_2\beta_2\left(\theta_2(R_2,\tau)-\theta_{1p}\right)=0 \tag{9}$$

$$\lambda_{m_2}\left[\frac{\partial \theta_2(R_2,\tau)}{\partial r}+\delta_2\frac{\partial t_2(R_2,\tau)}{\partial r}\right]+\beta_2\left(\theta_2(R_2,\tau)-\theta_{2p}\right)=0 \tag{10}$$

în care:

λ_q - conductivitatea termică, W/(m·K)

λ_m - conductivitatea masică, kg /(m·°M);

α, β - coeficienţii transferului de căldură, W/(m²·K) şi de masă, kg/(m²s°M).

Ele reprezintă ecuaţiile bilanţului termic şi ale bilanţului masic aplicate suprafeţelor corpului.

Condiţiile iniţiale sunt determinate de legea distribuirii temperaturii şi potenţialului transferului de masă în momentul iniţial.

După introducerea afirmaţiilor (11) şi (12), folosind transformarea Laplase, au fost realizate calculele sistemului ecuaţiilor diferenţiale ale transferului de căldură şi de masă:

$$L[rt(r,\tau)]=\int_0^\infty rt(r,\tau)e^{-pt}dt = V_L(r,p) \tag{11}$$

$$L[r\theta(r,\tau)]=\int_0^\infty r\theta(r,\tau)e^{-pt}dt = U_L(r,p) \tag{12}$$

$$\frac{t_1(r,\tau)-t_0}{t_c-t_0}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n11}\frac{\sin\nu_{12}\mu_{n1}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}-C_{n12}\frac{\sin\nu_{11}\mu_{n1}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}-\frac{C_{n13}}{r}\right)\cdot \exp(-\mu_{n1}^2 Fo_1) \tag{13}$$

$$\frac{U_{01}-U(r,\tau)}{U_{01}-U_{1p}}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C^*_{n_{12}}(1-\nu_{11}^2)\frac{\sin\mu_{n_1\nu_{11}}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}-C^*_{n_{11}}(1-\nu_{12}^2)\frac{\sin\mu_{n_1\nu_{12}}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}\right)\cdot \exp(-\mu_{n_1}^2 Fo_1) \tag{14}$$

- pentru stratul exterior:

$$\frac{t_2(r,\tau)-t_0}{t_c-t_0}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n21}\frac{\sin\nu_{22}\mu_{n2}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}-C_{n22}\frac{\sin\nu_{21}\mu_{n2}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}-\frac{C_{n23}}{r}\right)\cdot \exp(-\mu_{n2}^2 Fo_2) \tag{15}$$

$$\frac{U_{02}-U(r,\tau)}{U_{02}-U_{2p}}=1- \tag{16}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C^{*}_{n_{22}}(1-\nu_{21}^{2})\frac{\sin\mu_{n_2\nu_{21}}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}-C^{*}_{n_{21}}(1-\nu_{22}^{2})\frac{\sin\mu_{n_2\nu_{22}}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\mu_{n_2}^{2}Fo_2)$$

În scopul simplificării modelului matematic dat, ecuaţiile obţinute (13, 14, 15 şi 16) au fost aproximate în funcţie de rază. În rezultat, ele se prezintă în modul următor:

- stratul interior:

$$\bar{t}_1(\tau)=\frac{3}{R_1^3}\int_0^{R_1}t_c dr-\frac{3}{R_1^3}\cdot \tag{17}$$

$$\cdot\int_0^{R_1}\left[(t_c-t_{01})\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n11}\frac{\sin\nu_{12}\mu_{n1}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}-C_{n12}\frac{\sin\nu_{11}\mu_{n1}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}-\frac{C_{n13}}{r}\right)\exp(-\mu_{n1}^2Fo_1)\right]dr$$

$$\overline{U}_1(\tau)=\frac{3}{R_1^3}\int_0^{R_1}U_{1ec}dr+ \tag{18}$$

$$+\frac{3}{R_1^3}\int_0^{R_1}\left[\begin{array}{l}(U_{01}-U_{1ec})\sum_{n=1}^{\infty}\left(C^{*}_{n_{12}}(1-\nu_{11}^2)\frac{\sin\mu_{n_1\nu_{11}}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}-C^{*}_{n_{11}}(1-\nu_{12}^2)\frac{\sin\mu_{n_1\nu_{12}}\frac{r}{R_1}}{\frac{r}{R_1}}\right)\cdot\\ \cdot\exp(-\mu_{n_1}^2Fo_1)\end{array}\right]dr$$

- stratul exterior:

$$\bar{t}_2(\tau)=\frac{3}{R_2^3}\int_0^{R_1}t_c dr- \tag{19}$$

$$-\frac{3}{R_2^3}\int_0^{R_1}\left[(t_c-t_{02})\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n21}\frac{\sin\nu_{22}\mu_{n2}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}-C_{n22}\frac{\sin\nu_{21}\mu_{n2}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}-\frac{C_{n23}}{r}\right)\cdot\exp(-\mu_{n2}^2Fo_2)\right]dr$$

$$\overline{U}_2(\tau)=\frac{3}{R_2^3}\int_0^{R_1}U_{2ec}dr+ \tag{20}$$

$$+\frac{3}{R_2^3}\int_0^{R_1}\left[(U_{02}-U_{2ec})\sum_{n=1}^{\infty}\left(C^{*}_{n_{22}}(1-\nu_{21}^2)\frac{\sin\mu_{n_2\nu_{21}}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}-C^{*}_{n_{21}}(1-\nu_{22}^2)\frac{\sin\mu_{n_2\nu_{22}}\frac{r}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}\right)\exp(-\mu_{n_2}^2Fo_2)\right]dr$$

Utilizarea modelului matematic obţinut este posibilă doar acceptându-se condiţiile:

$$T_1=C_{11}+A_{11}e^{B_{11}\tau} \tag{21}$$

$$U_1=C_{12}+A_{12}e^{B_{12}\tau} \tag{22}$$

$$T_2=C_{21}+A_{21}e^{B_{21}\tau} \tag{23}$$

$$U_2=C_{22}+A_{22}e^{B_{22}\tau} \tag{24}$$

în care:

A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} - constante ale ecuaţiilor date.

În rezultatul analizei statistice a datelor experimentale, au fost determinaţi coeficienţii numerici; pentru seminţele cătinii ecuaţia temperaturii fiind:

$$T_1=12+19.1_{11}e^{0.0069\tau} \tag{25}$$

În partea interioară a fructelor de cătină, variaţia umidităţii într-o unitate de timp va fi exprimată prin ecuaţia:

$$U_1=-12.2+64.2e^{-0.0043\tau} \tag{26}$$

O prezentare analogică va avea şi ecuaţia pentru partea exterioară (pulpa) a cătinii. Temperatura se determină prin ecuaţia:

$$T_2=20+15_{11}e^{0.0058\tau} \tag{27}$$

În procesul deshidratării, umiditatea miezului într-o unitate de timp poate fi determinată prin ecuaţia:

$$U_2=-7+95e^{0.0044\tau} \tag{28}$$

Criteriile Fişer ale ecuaţiilor (25), (26), (27) şi (28) au constituit respectiv 2,24; 2,12; 2,25 şi 11,04.

De aici reiese că modelul matematic al temperaturii şi umidităţii pentru produsele cu straturi multiple descrie adecvat procesul de uscare, deci cu ajutorul acestui model poate fi de-ter-minată temperatura şi umiditatea fructelor de cătină în orice moment, astfel fiind optimizat procesul de deshidratare.

SUMMARY

In this article it is represented a mathematical model of the phenomena of mass and heat change during the process of drying the sea-buckthorn, utilizing the combined methods of heating: convection and UHF.