DINAMICA OSCILATORULUI PLAN

Autorul: Dan CARAGANCIU

Conducător științific prof. univ. Anatolie CASIAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract*: Se analizează mişcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale, proporționale vectorului de poziție al punctului, când viteza inițială $\vec{v_0}$, care formează un unghi ascuțit α cu direcția vectorului de poziție $\vec{r_0}$ în momentul inițial. Se demonstrează, că traiectoria punctului material M prezintă o elipsă, semiaxele căreia sunt înclinate față de vectorul $\vec{r_0}$ cumulat cu axa Ox. Se examinează cazurile particulare, când unghiul α=|π/2| şi când, totodată, $v_0=\omega r_0$. În cazul, când viteza inițială v_0 este nulă sau colineară cu vectorul de poziție $\vec{r_0}$, mişcarea punctului material devine rectilinie şi oscilatorie de–a lungul axei Ox.*

Cuvinte cheie*: forțe centrale, oscilator plan, elipsă, cerc, oscilații liniare*

Un exemplu de forță centrală este forța de elasticitate a unui resort cu coeficientul de elasticitate k. Conform integralei ariilor în formă integrală, ce rezultă din teorema momentului impulsului pentru punctul material, acționat de o forță centrală

$$\vec{F}=f(r)\frac{\vec{r}}{r}=f(r)\overline{r^{0}}, \qquad (1)$$

rezultă că punctul descrie traiectorie plană.
Fie punctul material acționat de resort se deplasează din poziția M_0 (resortul fiind nedeformat) în poziția M.

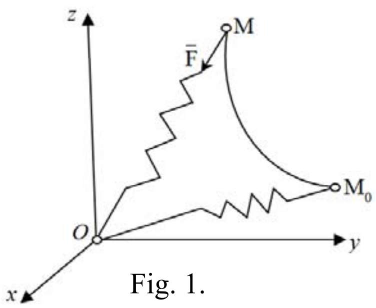

Fig. 1.

$$\vec{F} = -k(r'-r'_0)\,\overline{r^{0}}\,. \qquad (2)$$

Vom cerceta mişcarea punctului material situat pe un plan orizontal fără frecare şi acționat de forța (2). Forțele de greutate şi reacțiunea planului neted se echilibrează reciproc.

Când resortul este nedeformat punctul material se află în echilibru într-un punct oarecare O. Când resortul este întins, forța F acționează asupra punctului de-a lungul axei resortului spre punctul de echilibru O.

Dacă resortul este comprimat, el acționează punctul material cu o forță tot spre O şi, deoarece în acest caz deformația se consideră negativă, forța de elasticitate se exprimă la fel prin formula (2). Astfel putem admite că procesul decurge ca şi cum în poziția de echilibru O ar exista un centru de forță de atracție, proporțională cu vectorul de poziție $\vec{r}$ al punctului material în raport cu un reper cu originea în centrul O, adică,

$$\vec{F}= -k\vec{r} \qquad (3)$$

Ecuația diferențială a mişcării punctului material va fi :

$$m\ddot{\vec{r}} = - k\vec{r}, \qquad (4)$$

sau $\ddot{\vec{r}} +\omega^2\vec{r} =0,$ (5)

unde $\omega^2=\frac{k}{m}$. (6)

Fie în momentul inițial t_0=0 punctul material se află în M_0, fiind definit de vectorul de poziție $\vec{r_0}$ şi având viteza inițială $\vec{v_0}$, care face cu $\vec{r_0}$ unghiul *α*. Introducem axele de coordonate Oxy astfel ca axa Ox să treacă prin poziția M_o.

Proiectând (5) pe axele Ox si Oy vom avea 2 ecuații diferențiale scalare :

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,\ \ddot{y}+\omega^2 y=0 \qquad (7)$$

ele fiind ecuații diferențiale obişnuite liniare şi omogene de ordinul II cu coeficienții constanți şi având soluțiile

$$x=A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t,\ y=A_2\cos\omega t+B_2\sin\omega t. \qquad (8)$$

Aici A_1, B_1, A_2, B_2 sunt constante de integrare.

Eliminând între ecuațiile (8) $\cos\omega t$ şi $\sin\omega t$ vom obține traiectoria punctului material :

$$ax^2+by^2-2dxy=1, \qquad (9)$$

în care $a=\frac{A_2^2+B_2^2}{\Delta^2}$, $b=\frac{A_1^2+B_1^2}{\Delta^2}$, $d=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\Delta^2}$, $\Delta=A_1B_2-B_1A_2$. (10)

Substituind condițiile inițiale $t_0=0$, : $x_0=r_o$, $y_0=0$, $\dot{x}_0=v_0\cos\alpha$, $\dot{y}_0=v_0\sin\alpha$, în ecuațiile (8) şi derivatele lor în raport cu timpul

$$\dot{x}=-A_1\omega\sin\omega t+B_1\omega\cos\omega t,\ \dot{y}=-A_2\omega\sin\omega t+B_2\omega\cos\omega t, \qquad (11)$$

se obține

$$A_1=r_0, B_1=\frac{v_0\cos\alpha}{\omega},\ A_2=0,\ B_2=\frac{v_0\sin\alpha}{\omega},$$

şi ecuația (11) ia forma

$$\frac{(x-y\,ctg\alpha)^2}{r_0^2}+\frac{\omega^2y^2}{v_0^2\sin^2\alpha}=1. \qquad (12)$$

Aceasta este ecuația elipsei cu centrul în originea sistemului de coordonate O, iar direcțiile axelor principale sunt înclinate față de axa Ox (fig.2).

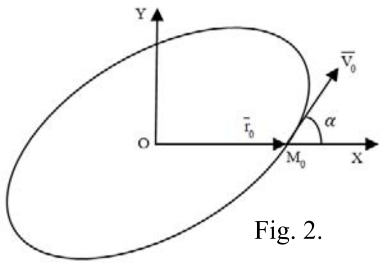

Fig. 2.

Dacă $\alpha=|\pi/2|$, atunci se obține elipsa cu axele dirijate după axele de coordonate Ox, Oy, fiind prezentată de ecuația :

$$\frac{x^2}{r_0^2}+\frac{\omega^2y^2}{v_0^2}=1. \qquad (13)$$

Când $\alpha=\pi/2$ şi,totodată, $v_0=\omega r_0$,atunci elipsa se transformă în cerc

$$x^2+y^2=r_o^2. \qquad (14)$$

În cazul când viteza inițială e nulă sau colineară cu vectorul de poziție ($\alpha=o;\pi$), mişcarea punctului devine rectilinie şi oscilatorie. Oscilațiile se efectuează de-a lungul axului resortului, iar în problema considerată, de-a lungul axei Ox, având ecuația:

$$x=a\sin(\omega t+\alpha). \qquad (15)$$

În concluzie, s-a demonstrat, că în mod general, traiectoria punctului reprezintă o elipsă. Au fost analizate şi cazuri particulare ale mişcării.

Bibliografie: 1.Петкевич В.В, Теоретическая механика, Москва, ”Наука”, 1981.
2..V.Caraganciu, M.Colpagiu, M.Țopa, Mecanica Teoretică, Chişinău, ”Ştiința”, 1994.