

# ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ОГРАНИЧЕННОГО ВО ВРЕМЕНИ СИГНАЛА

Сергей ГРИЦКОВ, Герман СОРОКИН

Технический Университет Молдовы

*Abstract: The paper considers the application of different window functions for spectral analysis of time-limited signals. Recommendations on window function type selecting from the given signal dynamic range and frequency resolution are given. The results of carried out experiments are presented.*

*Ключевые слова: Дискретное преобразование Фурье, спектральный анализ, оконная функция.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов оперирует с дискретными преобразованиями сигналов. С другой стороны обработка анализируемого сигнала производится, как правило, в течение определенного, конечного интервала времени. В принципе, в своих основных положениях математический аппарат дискретных преобразований подобен преобразованиям аналоговых сигналов и систем. Однако дискретность данных, конечный интервал анализа требует учета этих факторов, и их игнорирование может приводить к существенным ошибкам. Кроме того, ряд методов дискретной математики не имеет аналогов в аналитической математике.

## 2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В данной работе рассматривается спектральный анализ ограниченных во времени сигналов. Допустим, что имеется сигнал  $s_0(t)$  который бесконечен во времени и изменяется по гармоническому закону. Как известно, преобразование Фурье этого сигнала будет представлять собой дельта-импульс на частоте сигнала, т.е.  $S_0(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ . На практике расчет спектра сигнала производится в течение конечного интервала времени  $T$ . Таким образом мы получим сигнал  $s(t)$ , который совпадает с исходным на интервале времени  $T$ , а вне интервала равен нулю. Математически, сигнал  $s(t)$  можно представить как произведение исходного бесконечного сигнала  $s_0(t)$  и прямоугольного видеоимпульса  $w(t)$  длительностью  $T$ , т.е.  $s(t) = s_0(t) \cdot w(t)$ .

Спектр сигнала  $s(t)$ , на основании свойств преобразования Фурье будет равен свертке спектра исходного сигнала  $S_0(\omega)$  и спектра  $W(\omega)$  прямоугольного импульса  $w(t)$ . На основании фильтрующего свойства дельта-функции свертка будет равна:

$$S(\omega) = S_0(\omega) * W(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) * W(\omega) = W(\omega - \omega_0). \quad (1.1)$$

Спектр ограниченного во времени сигнала представлен на рис.1.1.

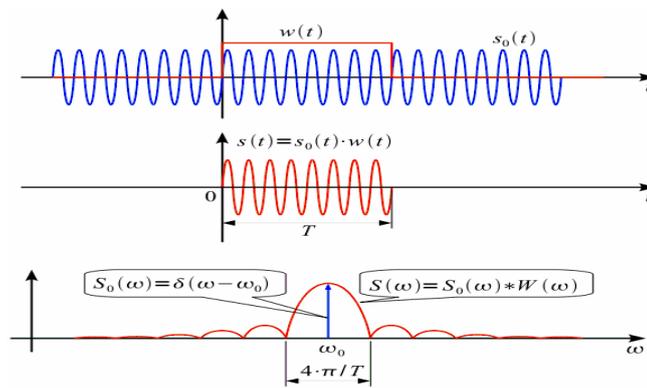


Рис.1.1. Спектр ограниченного во времени сигнала

Таким образом, вместо дельта-импульса спектр  $S(\omega)$  превратился в функцию типа  $\sin(x)/x$ , (спектр прямоугольного импульса функции  $w(t)$ ) причем ширина лепестка зависит от длительности интервала анализа  $T$ .

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) ставит в соответствие  $N$  отсчетам сигнала  $s(n)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )  $N$  отсчетов спектра, взятых на одном периоде повторения спектра  $S(k)$ , где  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Отсчеты сигнала берутся через равные промежутки времени  $\Delta t = 2\pi/\omega_d$ , где  $\omega_d$  – частота дискретизации. Спектральные отсчеты берутся через интервал  $\Delta\omega = 2\pi/T$ , где  $T = N \cdot \Delta t = N \cdot 2\pi/\omega_d$ . В этом случае возможны два случая.

Первый – частота сигнала совпадает с  $k$ -ой частотой спектра  $\omega_0 = \omega(k)$  (верхний график рис.1.2). При дискретизации получим только отсчет на частоте  $\omega_0 = \omega(k)$  по амплитуде соответствующий амплитуде сигнала. Остальные спектральные отсчеты будут равны нулю, так как моменты дискретизации спектра совпадут с нулями спектра оконной функции.

Второй – частота сигнала  $\omega_0$  не совпадает ни с одной частотой из сетки спектральных отсчетов (нижний график рис.1.2).

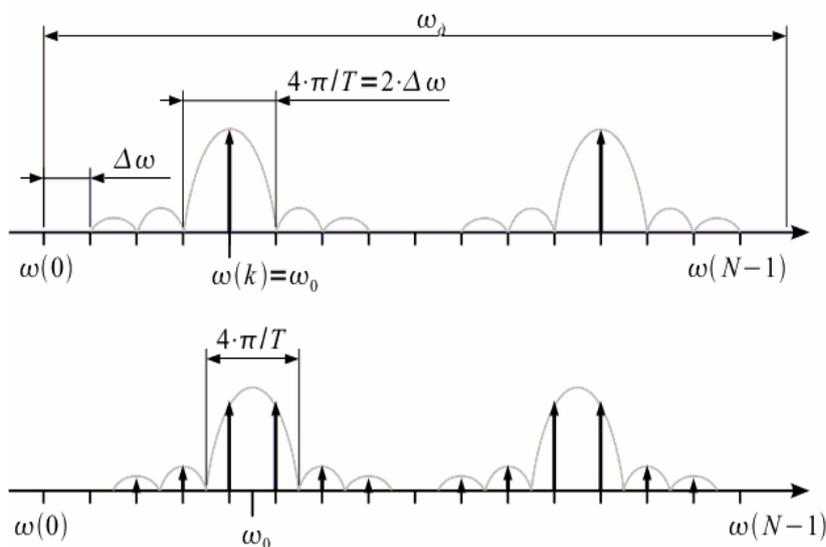


Рис.1.2. ДПФ при совпадении и несовпадении частоты сигнала и сетки частот спектра

Во втором случае спектр сигнала «размывается», вместо одного спектрального отсчета получаем множество отсчетов, так как дискретизация производится уже не в нулях спектра функции окна. Размазывание спектра негативный эффект, с которым необходимо бороться.

Пусть имеются два гармонических сигнала с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , причем амплитуда второго сигнала много меньше амплитуды первого сигнала. Ограничение интервала анализа приведет к тому,

что сигнал на частоте  $\omega_1$  будет не заметен под боковым лепестком первого сигнала, как это показано на рис.1.3.

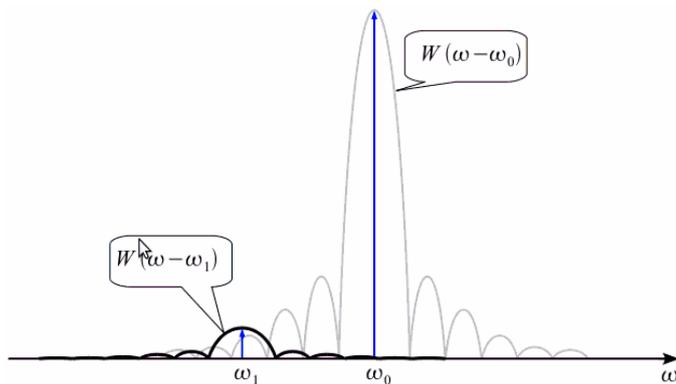


Рис.1.3. Спектр суммы двух сигналов с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$

Следовательно, необходимо устранить боковые лепестки в спектре оконной функции, т.е. надо изменить оконную функцию  $w(t)$  и сделать её более гладкой, как это показано на рис.1.4.

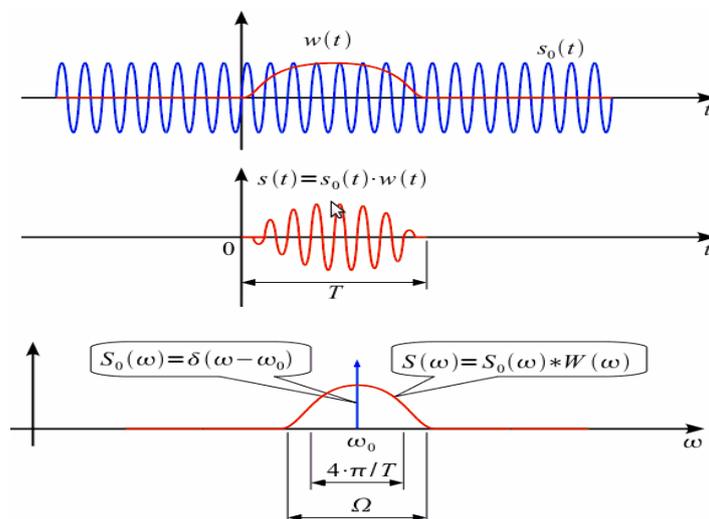


Рис.1.4. Спектр сигнала с гладкой весовой функцией

При гладкой весовой функции в спектре не наблюдаются боковые лепестки (или их уровень заметно уменьшается), однако имеет место расширения основного лепестка ( $\Omega > 4 \cdot \pi / T$ ). Однако, это свойство оконной функции позволяет выделить спектр слабого сигнала (Рис.1.5.).

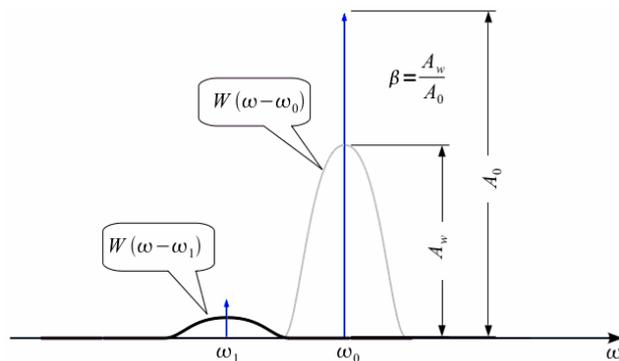


Рис.1.5. Спектр суммы двух сигналов при гладкой оконной функции

При диагностике подшипников качения основным информационным источником является вибросигнал, который анализируется в течение определенного интервала времени, когда подшипник вращается со стабильной нагрузкой и частотой вращения. В бездефектном подшипнике мощность сигнала не имеет периодических низкочастотных колебаний. В дефектном подшипнике эти колебания достаточно сильны и хорошо выделяются в спектре огибающей в виде гармонических составляющих, имеющих подшипниковые (характерные) частоты или их комбинации, причем амплитуды этих гармоник могут сильно отличаться между собой. Это требует определенного подхода к выбору вида оконной функции.

Допустим, вибросигнал состоит из трех гармоник с разными частотами и амплитудами:

$$s(t) = A_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 t), \quad (1.2)$$

где  $A_0 = 1$  (0 дБ),  $f_0 = 220$  Гц,  $A_1 = 0,003$  (- 50,46 дБ),  $f_1 = 240$  Гц,  $A_2 = 10^{-4}$  (- 80 дБ),  $f_2 = 230$  Гц.

Используя программу MatLab (интерактивная оболочка SPTool), выполним спектральный анализ, приведенного выше сигнала. Динамический диапазон сигнала составляет 80 дБ. Выберем частоту дискретизации  $F_d = 1$  кГц, выборка равна  $N = 2^{10} = 1024$  отсчетам сигнала. Расстояние между спектральными отсчетами в этом случае равно:

$$\Delta f = F_d / N = 1000/1024 \approx 0,977 \text{ Гц}. \quad (1.3)$$

Рассчитаем спектр исходного сигнала при использовании прямоугольного окна и окна Блэкмана – Наттала. Результаты спектрального анализа при использовании различных окон представлены на рис.1.6.- 1.7.соответственно.

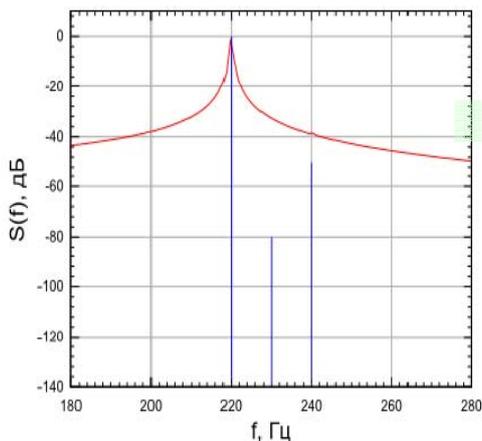


Рис.1.6. Спектр сигнала при использовании прямоугольного окна

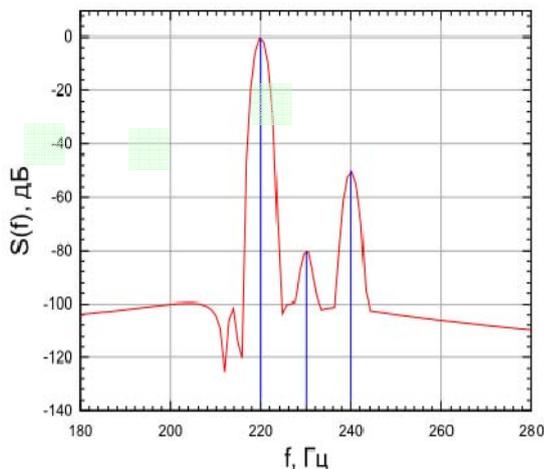


Рис.1.7. Спектр сигнала при использовании окна Блэкмана - Наттала

Без оконного сглаживания, ввиду очень высокого уровня боковых лепестков спектра прямоугольного окна (- 13 дБ) в спектре обнаруживается только гармоника на частоте 220 Гц. Окно Блэкмана – Наттала, спектр которого имеет уровень боковых лепестков – 98 дБ позволяет обнаружить все три спектральные составляющие сигнала. Таким образом, при спектральном анализе сигнала с известным или заданным динамическим диапазоном необходимо выбирать такую оконную функцию, уровень боковых лепестков спектра которой меньше заданного динамического диапазона.

Если динамический диапазон сигнала неизвестен, то можно его оценить исходя из разрядности АЦП, который используется для дискретизации сигнала:

$$D = 20 \cdot \log_{10} 2^M = M \cdot 20 \cdot \log_{10} 2 = M \cdot 6,02 \text{ дБ}, \quad (1.4)$$

где  $D$  – динамический диапазон в децибелах,  $M$  – разрядность АЦП.

Использование оконного сглаживания приводит к ухудшению разрешения по частоте ввиду расширения главного лепестка оконной функции. Если задано разрешение по частоте  $df$ , при котором требуется проанализировать спектр сигнала, то необходимо выполнить условие:

$$df > \Delta F_0 \cdot \Delta f = \Delta F_0 \cdot F_d / N, \quad (1.5)$$

где  $\Delta F_0$  – нормированная ширина главного лепестка спектра соответствующей оконной функции.

На рис.1.10 и рис.1.11 представлены результаты спектрального анализа сигнала при заданном разрешении по частоте  $df = 2$  Гц и различных выборках дискретного преобразования Фурье

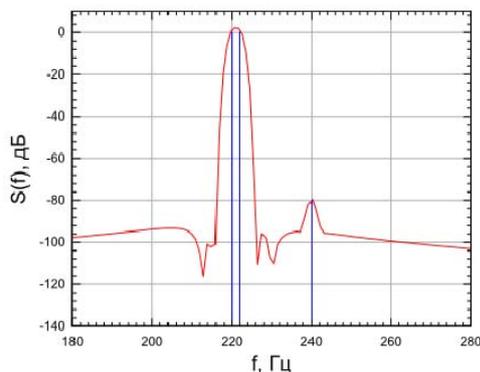


Рис.1.10. Спектр сигнала при использовании окна Блэкмана – Наттала (N = 1024)

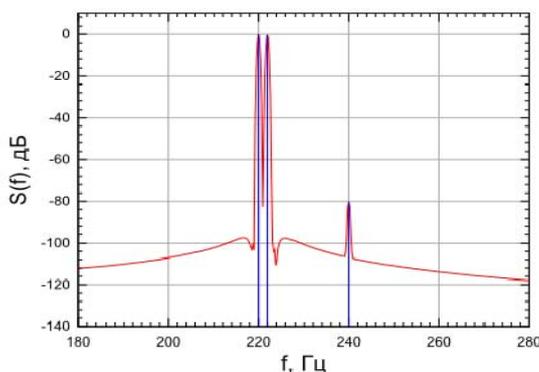


Рис.1.11. Спектр сигнала при использовании окна Блэкмана – Наттала (N = 4096)

Из спектральных диаграмм видно, что при одинаковом динамическом диапазоне сигнала при использовании выборки  $N = 1024$  окно Блэкмана – Наттала не позволяет различить гармоники на частотах 220 и 222 Гц, так как не выполняется условие (1.5). При  $N = 4096$  условие (1.5) выполняется и все три гармоники в спектре сигнала различимы.

### 3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

При практической реализации преобразования Фурье применяют различные подходы. В данной статье рассмотрен пример применения дискретного преобразования Фурье над конечными полями Галуа, рассмотренный в [6]. Структурная схема устройства для реализации преобразования Фурье, составленная на основе алгоритмов, описанных в [6], и макетный образец устройства, представлены на рис. 1.12.

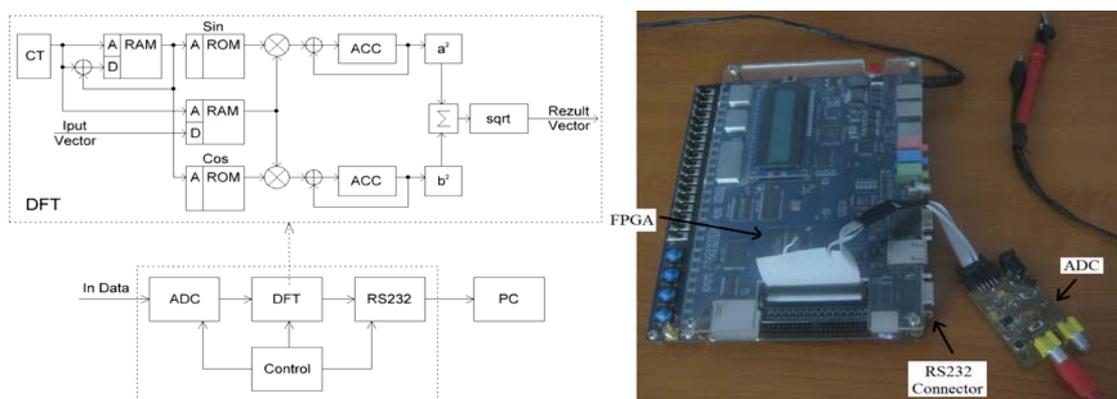


Рис.1.12. Структурная схема устройства для реализации преобразования Фурье и его макетный образец.

Принцип функционирования устройства преобразования Фурье (рис.1.12) заключается в следующем. Входной сигнал, спектр которого анализируется, поступает на блок оцифровки “ADC”, оцифрованные данные поступают на блок “DFT”, который выполняет преобразование Фурье (структурная схема блока “DFT” изображена на рис.1.12, а принцип работы изложен в [6]). Полученный спектр на выходе блока “DFT” посредством модуля “RS232” передается на компьютер (модуль “PC”) для визуализации и обработки результатов анализа.

Устройство преобразования Фурье реализовано на основе kit “DE-2” фирмы Altera. Модуль “ADC” реализован на дополнительной плате, а все остальные модули (DFT, RS232, Control) реализованы на основе FPGA Cyclone II, входящей в состав kit “DE-2”. При реализации устройства преобразования Фурье было задействовано 642 логические ячейки (2% от общего количества) и 335900 бит памяти (69% от общего количества) FPGA Cyclone II. Данное устройство для реализации преобразования Фурье позволяет определять спектр сигнала до 4 кГц с шагом в 1 Гц.

Для отображения результатов преобразования Фурье на компьютере был спроектирован GUI (Graphical user interface) в среде Borland Delphi, представленный на рис. 1.13.

В эксперименте синусоидальный сигнал частотой 3 кГц подавался на разработанное устройство преобразования Фурье (без учета оконной функции) и на осциллограф DS1052D (применяется преобразование Фурье с учетом оконной функции). В первом случае (рис. 1.14, слева) помимо основной гармоники с частотой в 3 кГц видны гармонические составляющие вплоть до 4 кГц (верхняя граница преобразования данного устройства), которых в спектре основного сигнала быть не должно.

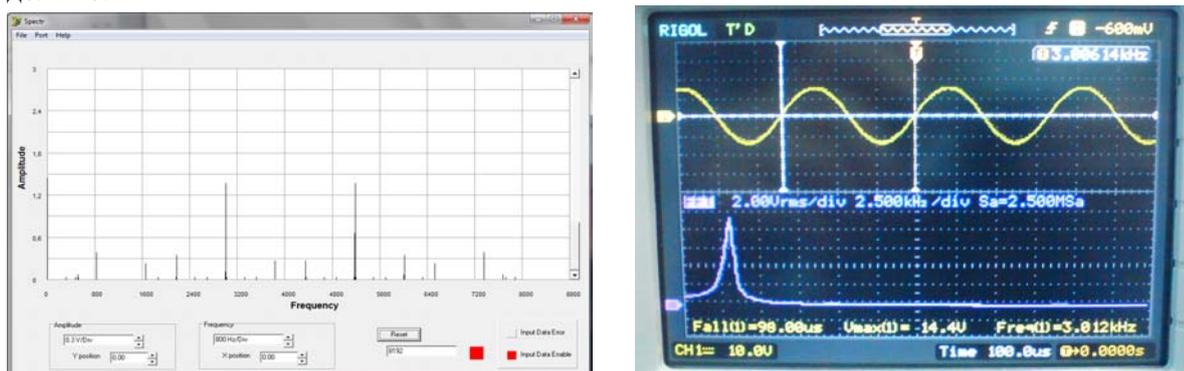


Рис.1.13. Результаты спектрального анализа анализируемого сигнала

Во втором случае (рис. 1.13 справа: результаты осциллографа DS1052D) отображается лишь основная гармоника с частотой в 3 кГц. Полученные результаты говорят о необходимости учета оконной функции при реализации преобразования Фурье.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, был рассмотрен вопрос вычисления спектра сигнала при наблюдении на ограниченном временном отрезке. Показано, что ограничение времени анализа равносильно использованию прямоугольной оконной функции, частотная характеристика которой имеет максимальные боковые лепестки. Приведен механизм снижения уровня боковых лепестков путем сглаживания окном, что в свою очередь, ухудшает разрешение спектрального анализа из-за расширения основного лепестка. Показано, что для качественного спектрального анализа необходимо выбрать такую оконную функцию, у которой уровень боковых лепестков спектра оконной функции меньше динамического диапазона сигнала. Размер выборки ДПФ необходимо выбирать исходя из требуемого разрешения по частоте на основании частоты дискретизации и свойств выбранной оконной функции. Результаты экспериментального анализа подтвердили результаты моделирования.

#### 5. БИБЛИОГРАФИЯ

1. Хэррис Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. – ТИИЭР, т.66, №1, январь 1973. – сс.60-97.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – М., ПИТЕР, 2002. – 603с.
3. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ.- М.: Техносфера, 2006.- 856 с.
4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. -М.: Мир, 1990.
5. St. Andria, M. Savino, and A. Trotta, "Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy," I.EE Trans. Instrum Meas., vol. 38, pp. 856-863, 1989.
6. Г. Сорокин, Г. Бодян. Фурье-преобразование над конечными полями и его реализация на программируемых микросхемах. «Telecommunications, Electronics and Informatics» Inter.conferens. Vol.2. -Ch.: U.T.M., 2010, стр. 215÷226.