Aplicarea Metodelor Numerice de Interpolare a Funcțiilor în Microsoft Excel

Țîcău V.
Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălți
Bălți, Moldova
VitalieSTicau@gmail.com

***Abstract* – Interpolation has a very large application in practice. For example: planning schedule of an activity, generating movement of a body in the plan or space, processing of graphical information for neglecting some shades of color, that are hardly recognized by human's eyes etc. *The problem* that is described in this document is application of numerical methods of interpolation in order to determinate the unknown values in Microsoft Excel. The reason of study consists in researching of numerical methods of polynomial interpolation and development teaching guide of interpolation of functions in Microsoft Excel. The numerical methods of function of interpolation are investigated. Applications are presented of several polynomial interpolation such as: Lagrange and Newton in case of arbitrary or equidistant nodes and Gauss, Sterling in case of equidistant symmetrical nodes. The way of polynomial interpolation in Microsoft Excel is described step by step. These algorithms are presented in Microsoft Excel, and also practical examples that are solved with analyzed results.**

Termeni cheie – interpolare, Microsoft Excel, polinoame de interpolare Lagrange, Newton, Gauss, Sterling.

I. CONȚINUTUL LUCRĂRII

Problema interpolării. Una dintre cele mai răspândite metode de aproximare a funcțiilor este *metoda interpolării*. Fie că pentru funcția $f(x)$ definită pe segmentul $[a,b]$ nu se cunosc decât $n+1$ valori în $n+1$ puncte x_i. Notăm valorile funcției prin $f(x_i)$. *Interpolarea* este o metodă de aproximare, care permite obținerea unei valori $j(x)$ destul de apropiate de valoarea necunoscută $f(x)$ a funcției f în punctul $x\,Î\,[a,b]$, diferit de punctele x_i. Mai exact, interpolarea determină o funcție j cu o expresie concretă, care aproximează funcția f, cunoscută în mod discret fără a avea expresia ei analitică. Punctele x_i se numesc *noduri de interpolare* [1].

Interpolarea se aplică şi în cazul, când expresia funcției $f(x)$ este cunoscută, însă e prea complicată. Este clar, deci, că funcția de interpolare $j(x)$ trebuie să aibă o expresie simplă. De obicei, ea reprezintă o combinație liniară de polinoame, de funcții exponențiale sau trigonometrice.

În general $j(x)$ se alege în felul următor: fixăm $n+1$ funcții liniar independente $j_0(x), j_1(x), ..., j_n(x)$ şi în mulțimea tuturor combinațiilor liniare ale lor se determină aceea, care verifică condițiile de interpolare:

$$j(x_j) = f(x_j),\ j = 0,1,2,...,n. \qquad (1)$$

Expresia lui $j(x)$ se obține din relația:

$$j(x) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_j(x) f(x_j), \qquad (2)$$

unde $F_j(x)$ sunt combinații liniare de funcții $\{j_i(x)\}$ şi nu depind de funcția $f(x)$. Condițiile de interpolare (1) implică, prin urmare, proprietățile [1]:

$$F_j(x_i) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}. \qquad (3)$$

Polinomul de interpolare Lagrange. În calitate de $\{j_i(x)\}_{i=0,n}$ se iau funcțiile $1, x, x^2, ..., x^n$. Este clar, că funcția de interpolare devine un polinom $P_n(x)$ de gradul $£\ n$. Polinomul de interpolare $P_n(x)$ al unei funcții f, cunoscută în punctele $x_0,x_1,...,x_n$ $(x_i\,¹\,x_j)$, există şi este unic [2].
Se obține *polinomul de interpolare al lui Lagrange:*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i), \qquad (4)$$

unde *polinoamele lui Lagrange* $L_i(x)$ se determină din relațiile:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}. \qquad (5)$$

Proprietatea 1. $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1.$

Proprietatea 2. Polinomul L_i este invariant față de o transformare liniară a variabilei.
Când nodurile sunt echidistante la distanța h, adică x_0, $x_0+h,...,x_0+nh$, putem efectua transformarea liniară $x=x_0+ht$. După variabila t nodurile vor fi $0,1,...,n$. Ținând cont de proprietatea a doua, polinomul de interpolare va fi:

$$P_n(x_0+ht) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j\neq i}(t-j)}{\prod_{j\neq i}(i-j)} f_i. \qquad (6)$$

Înmulțind numărătorul şi numitorul la $(t-i)n(n-1)...(n-(i+1))$, după transformări elementare obținem

$$P_n(x_0+ht) = \frac{t(t-1)...(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \frac{f_i}{(t-i)}. \qquad (7)$$

Fie $P_n(x)$ polinomul ce interpolează funcția $f(x)$ după nodurile $x_0,x_1,...,x_n$. După construcție polinomul $P_n(x)$ coincide cu funcția $f(x)$ în punctele x_i, deci $f(x_i)=P_n(x_i)$. Însă pentru un oarecare punct de pe $[a,b]$, în genere, nu vom mai avea egalitatea funcției şi a polinomului. Anume această deviere $e(x) = f(x) - P_n(x)$ numită *eroare de interpolare* şi se cere de evaluat. Pentru eroare într-un punct se obține:

$$e(x)=f(x)-P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\cdot f^{(n+1)}(x)/(n+1)!. \qquad (8)$$

Pentru unul şi acelaşi număr de noduri eroarea va fi cu atât mai mică, cu cât factorul $|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$ este mai mic. Valoarea acestuia la rândul său depinde de faptul cum sunt alese nodurile x_i. Mai târziu vom vedea, că este posibil de ales pe x_i astfel, încât factorul acesta să devină minimal.

Forma generală a polinomului de interpolare Newton. Fie că în punctele $x_0,x_1,...,x_n$ se cunosc valorile funcţiei f: $f(x_0)$, $f(x_1),...,f(x_n)$. Se numesc *diferenţe divizate de ordinul 1* ale funcţiei f rapoartele:

$$f[x_i,x_j] \equiv (f(x_i)-f(x_j))/(x_i-x_j),\ i \neq j; \quad (9)$$

şi, continuând în acelaşi mod, *diferenţa de ordinul n:*

$$f[x_0,x_1,...,x_n] = (f[x_0,...,x_{n-1}] - f[x_1,...,x_n])/(x_0-x_n). \quad (10)$$

Diferenţele divizate au următoarele proprietăţi:

Proprietatea 1. Diferenţa divizată de ordinul n poate fi reprezentată sub forma:

$$f[x_0,x_1,...,x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{H'(x_i)}, \quad (11)$$

unde $H(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$.

Proprietatea 1 poate fi demonstrată prin metoda inducţiei [3].

Proprietatea 2. Diferenţa divizată este o funcţie simetrică faţă de argumentele ei, adică:

$$f[x_0,x_1,...,x_n] = f[x_1,x_0,...,x_n] = ... = f[x_n,x_{n-1},...,x_0]. \quad (12)$$

Aceasta înseamnă, că ordinea în care punctele x_i intervin în diferenţa divizată n-are importanţă. Demonstraţia proprietăţii 2 rezultă din proprietatea 1.

Proprietatea 3. Funcţia $f(x)$ se exprimă prin diferenţele sale divizate:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+...+x-x_0)...(x-x_n)\cdot f[x,x_0,...,x_n]. \quad (13)$$

Proprietatea 4. Diferenţa divizată de ordinul $n+1$ de la un polinom $P(x)$ de gradul n este nulă.

Pentru un sistem dat de noduri diferenţele divizate pot fi aranjate sub formă de tabel (tabelul 1.1).

TABELUL 1. TABELUL DIFERENŢELOR DIVIZATE

x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

Polinomul de interpolare al lui Newton:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\cdot f[x_0,x_1,x_2] + ... + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,...,x_n], \quad (14)$$

Dacă, se adaugă k noduri noi, termenii iniţiali rămân neschimbaţi. În aceasta şi constă avantajul formei lui Newton faţă de forma lui Lagrange a polinomului de interpolare [3]. Comparând formula lui Newton cu proprietatea 3 a diferenţelor divizate, obţinem o altă formulă pentru eroarea interpolării $\varepsilon(x)$, anume:

$$\varepsilon(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\cdot f[x_0,x_1,...,x_n,x]. \quad (15)$$

Ţinând cont de formulă pentru eroare (8), se poate stabili relaţia dintre diferenţele divizate şi derivatele funcţiei $f(x)$:

$$f[x_0,x_1,...,x_n] = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!,\ \text{unde}\ \xi \in [a,b]. \quad (16)$$

Formulele polinoamelor de interpolare Newton în diferenţe finite. Formulele în diferenţe finite se obţin în cazul nodurilor echidistante, pentru $x_0,x_1,...,x_n$ are loc egalitatea:

$$x_i - x_{i-1} = h,\ i = 1,2,...,n. \quad (18)$$

Ţinând cont de eroarea interpolării, numerotăm nodurile şi le folosim într-o anumită ordine.

Se numesc *diferenţe finite de ordinul 1* expresiile:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad (19)$$

diferenţe finite de ordinul 2 expresiile:

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) \quad (20)$$

şi, în genere, diferenţe finite de ordinul k expresiile:

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i) \quad (21)$$

pentru orice valori ale lui k. Aceste diferenţe pot fi calculate în mod recurent [4].

Nodurile situate în ordine regresivă se notează cu indici negativi. Calculul diferenţelor finite poate fi executat sub formă de tabel (tabelul 2).

TABELUL 2. TABELUL DIFERENŢELOR FINITE

x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
x_3	f_3	Δf_3			
x_4	f_4				

Proprietatea 1. Diferenţa finită de ordinul $n+1$ de la un polinom $P_n(x)$ de gradul n este nulă.

Proprietate 2. Diferenţa finită de orice ordin se exprimă şi prin valorile funcţiei în noduri.

Prin recurenţă se poate demonstra relaţia generală dintre diferenţele divizate şi cele finite:

$$f[x_i,x_{i+1},...,x_{i+k}] = \Delta k f[x_i]/(k!h^k). \quad (22)$$

Formulele polinoamelor de interpolare Newton în diferenţe finite se obţin din formula polinomului de interpolare al lui Newton (15) când nodurile sunt aranjate într-o anumită ordine, înlocuind diferenţele divizate prin cele finite după relaţia (22) [3]. Fie, nodurile x_i sunt echidistante şi aranjate în ordinea progresivă $x_0,x_0+h,...,x_0+nh$.

Datorită simetriei diferenţelor divizate, se obţine *prima formulă a lui Newton*:

$$P_n(x_0+ht) = f_0+t\Delta f_0 + t(t-1)\Delta^2{}_0/2! + ... + t(t-1)...(t-n+1)\Delta^n{}_0/n!,\ t = (x-x_0)/h; \quad (23)$$

Ea este mai bine adaptată la începutul tabelului [2].

Presupunem, că nodurile x_i sunt echidistante şi aranjate în ordinea progresivă $x_0,x_0-h,...,x_0-nh$. În mod analog se obţine *a doua formulă a lui Newton*:

$$Pn(x0+ht) = fn+t\Delta fn\text{-}1 + t(t+1)\Delta 2n\text{-}2/2! + ... + t(t+1)...(t+n-1)\Delta n0/n!,\ t = (x-xn)/h; \quad (24)$$

Ea este mai bine adaptată la sfîrşitul tabelului [2].

Formulele progresivă şi regresivă a polinomului de interpolare Gauss, Sterling se obţin din polinomul de interpolare al lui Newton în caz general (15) nodurile, însă, sunt numerotate în mod simetric.

Prima formulă de interpolare a lui Gauss:

$$P_n(x_0+ht) = f_{n/2}+t\Delta f_{n/2-1}+t(t-1)\Delta^2{}_{(n-1)/2}/2! + ... + t(t-1)(t+1)...(t-n+1)\Delta^n{}_0/n!,\ t=(x-x_{n/2})/h; \quad (25)$$

A doua formulă de interpolare a lui Gauss:

$$Pn(x0+ht)=fn/2+t\Delta fn/2\text{-}1+t(t+1)\Delta 2(n\text{-}1)/2/2! + ... + t(t+1)(t-1)...(t+n-1)\Delta n0/n!,\ t=(x-xn/2)/h; \quad (26)$$

La formulele Gauss se lucrează pe linia de mijloc şi sunt mai bine adaptate la mijlocul tabelului [4].

Semisuma ambelor formule Gauss dă *formula de interpolare Sterling*:

$$P_n(x_0+ht) = f_{n/2} + t\Delta f_{n/2-1} + t^2\Delta^2{}_{(n-1)/2}/2! + ... + t^2(t^2-1)...(t^2-(n-1)^2)\Delta^n{}_0/n!,\ t = (x-x_{n/2})/h; \quad (26)$$

La formula lui Sterling se lucrează pe linia de mijloc (linia 0).

Aplicarea polinomului de interpolare Lagrange în Microsoft Excel. Pentru interpolarea funcţiilor se poate efectiv de folosit calculatorul. Interpolarea poate fi aplicată în 2 cazuri:

- cînd funcţia este dată în mod discret;
- cînd se cunoaşte expresia funcţiei pentru testare.

1. Fie că funcţia este dată în mod discret.

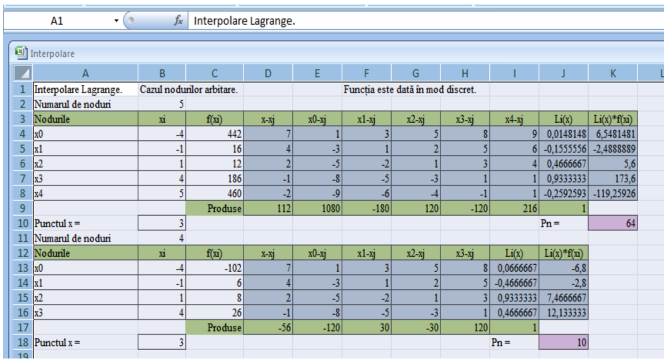
Pentru început se introduce baza interpolării: numărul de noduri, însăşi nodurile şi valorile funcţiei în noduri (fig. 1):

1. în linia 1 se înscrie titlurile:
   1.1. în celula *A1* se înscrie textul „*Interpolare Lagrange*";
   1.2. în celula *B1* se înscrie textul „*Cazul nodurilor arbitrare*";
   1.3. în celula *F1* se înscrie textul „*Funcţia este dată în mod discret*".
2. În linia 2 se înscrie numărul de noduri:
   2.1. în celula *A2* se înscrie textul „*Numărul de noduri*";
   2.2. în celula *B2* se înscrie valoarea. De exemplu, *5*.
3. În linia 3 se înscrie antetul tabelei de interpolare:
   3.1. în celula *A3* se înscrie textul „*Nodurile*";
   3.2. în celula *B3* se înscrie textul „*xi*";
   3.3. în celula *C3* se înscrie textul „*f(xi)*";
   3.4. în celula *D3* se înscrie textul „*x-xj*";
   3.5. în celulele *E3:I3* se înscriu textele> „*x0-xj*", „*x1-xj*", „*x2-xj*", „*x3-xj*", „*x4-xj*";
   3.6. în celula *J3* se înscrie textul „*Li(x)*";
   3.7. în celula *K3* se înscrie textul „*Li(x)*f(xi)*".
4. În celulele *A10:A11* se indică punctul cercetării.
5. Se completează celulele *A4:A8* cu textele „*x0*" – „x4".
6. Se completează celulele *B4:B8* şi *C4:C8* cu valorile respective.

Pentru efectuarea calculelor necesare se efectuează următorii paşi:

1. Se completează coloana *D* cu valorile calculate $(x - x_j)$;
   1.1. în celula *D4* se înscrie "*=$B$10-B4*". Pentru argumentul x se aplică adresa absolută, iar pentru x_j se aplică adresa relativă;
   1.2. cu ajutorul mânerului de umplere se completează celulele *D5:D8*.
2. Se completează coloanele *E – I* cu valorile $(x_i - x_j)$ pentru $i = 0, \ldots, 4$:
   2.1. pentru efectuarea efectivă a calculelor conform formulei de interpolare Lagrange, se înscriu pe diagonală valorile 1 – în celulele *E4, F5, G6, H7, I8*;
   2.2. în celula *E5* se înscrie *= $B$4-$B5*;
   2.3. cu ajutorul mânerului de umplere se completează celulele *E6:E8*;
   2.4. în mod similar se completează celulele *F4:I8*.
3. Se completează coloana *J* cu valorile funcţiei $L_i(x)$:
   3.1. în celula *J4* se înscrie *=$D$9/(E$9*$D4)*;
   3.2. cu ajutorul mânerului de umplere se completează celulele *J5:J8*.
4. Se completează coloana *K* cu valorile $L_i(x)f(x_i)$:
   4.1. în celula *K4* se înscrie *= $C4*$J4*;
   4.2. cu ajutorul mânerului de umplere se completează celulele *K5:K8*.
5. Se calculează valoarea aproximativă a polinomului de interpolare ca sumă a valorilor calculate, înscrise în coloana *K*: *=СУММ(K4:K8)*.

În fig. 1 este prezentat un exemplu de aplicare a interpolării Lagranje pentru 4 şi 5 noduri.



A1 | fx | Interpolare Lagrange.

Interpolare

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Interpolare Lagrange.	Cazul nodurilor arbitare.				Funcția este dată în mod discret.					
2	Numarul de noduri	5									
3	Nodurile	xi	f(xi)	x-xj	x0-xj	x1-xj	x2-xj	x3-xj	x4-xj	Li(x)	Li(x)*f(xi)
4	x0	-4	442	7	1	3	5	8	9	0,0148148	6,5481481
5	x1	-1	16	4	-3	1	2	5	6	-0,1555556	-2,4888889
6	x2	1	12	2	-5	-2	1	3	4	0,4666667	5,6
7	x3	4	186	-1	-8	-5	-3	1	1	0,9333333	173,6
8	x4	5	460	-2	-9	-6	-4	-1	1	-0,2592593	-119,25926
9			Produse	112	1080	-180	120	-120	216	1	
10	Punctul x =	3								Pn =	64
11	Numarul de noduri	4									
12	Nodurile	xi	f(xi)	x-xj	x0-xj	x1-xj	x2-xj	x3-xj	Li(x)	Li(x)*f(xi)	
13	x0	-4	-102	7	1	3	5	8	0,0666667	-6,8	
14	x1	-1	6	4	-3	1	2	5	-0,4666667	-2,8	
15	x2	1	8	2	-5	-2	1	3	0,9333333	7,4666667	
16	x3	4	26	-1	-8	-5	-3	1	0,4666667	12,133333	
17			Produse	-56	-120	30	-30	120	1		
18	Punctul x =	3							Pn =	10	
19											

Fig. 1. Exemplu de aplicare a interpolării Lagrange

2. Fie că se cunoaşte expresia funcţiei.

Algoritmul de completare, în general, este acelaşi, doar că în coloana *C* se calculează valorile funcţiei în noduri şi nu se introduc. De exemplu, se generează formule de forma: *=EXP(B23)/B23* pentru funcţia $y = e^x/x$. Se mai adaugă calculul valorii funcţiei în punctul cercetat şi evaluarea erorii: *=ABS(K30-K29)*, unde în celula *K30* este obţinută valoarea exactă a funcţiei, iar în celula *K29* este obţinută prin interpolare valoarea aproximativă.

În mod similar se pot defini algoritmi de aplicare a polinoamelor de interpolare Lagrange, Newton, Gauss şi Sterling în cazul nodurilor echidistante şi în cazul nodurilor arbitrare.

BIBLIOGRAFIE

[1] C. Berbente, S. Mitran, S. Zancu. Metode numerice. Bucureşti: Editura Tehnică, 1998, 315 p.

[2] G. Secrieru, I. Secrieru. Analiza numerică Chişinău: Ştiinţa,1985, 206 p.

[3] C. Brătianu, V. Bostan, L. Cojocia, G. Negreanu. Metode numerice. Bucureşti: Editura tehnică, 1996, 207 p.

[4] I. Borş. Analiza numerică, Cluj-Napoca: UTPRES, 2001.

[5] R. Nicole, "Titlul lucrării cu prima litera majusculă," J. Name Stand. Abbrev., in publicare.

[6] Y. Yorozu, M. Hirano, K. Oka, and Y. Tagawa, "Electron spectroscopy studies on magneto-optical media and plastic substrate interface," IEEE Transl. J. Magn. Japan, vol. 2, pp. 740–741, August 1987 [Digests 9th Annual Conf. Magnetics Japan, p. 301, 1982].

[7] M. Young, The Technical Writer's Handbook. Mill Valley, CA: University Science, 1989.