Моделирование Параметров Целевой Функции для Одной Линейной Сетевой Задачи Обратной Оптимизации

Пилипчук Л.А., Пилипчук А.С.
Факультет прикладной математики и информатики
Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
pilipchuk@bsu.by, an.pilipchuk@gmail.com

***Abstract* — The mathematical models of inverse optimization problems for linear generalized flow programming problems with additional constraints of general type are proposed, when the parameters of the objective function unknown. We use the properties of the dual problem and the complementary slackness conditions. We are modeling the parameters of the objective function in accordance with the selected norm so that the feasible solution becomes the optimal.**

***Ключевые слова* — Линейное программирование, целевая функция, допустимое решение, оптимальное решение, обратная оптимизация, моделирование параметров.**

Рассматриваются математические модели линейных задач потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений. Для нахождения оптимальных решений исследуемых экстремальных задач для заданных (известных) значений параметров в [1, 2] разработана конструктивная теория, которая основана на использовании общих принципов оптимизации для сетевой структуры ограничений для задач, содержащих ограничения общего вида. Разработаны математические методы построения оптимальных решений задач математического программирования, основанные на учете специфики определенных классов задач, использовании концепции теории графов и результатов теории потоков с применением эффективных технологий построения их численных решений. Однако, когда неизвестны значения некоторых параметров задачи, но известно некоторое допустимое решение, то могут быть применены принципы обратной оптимизации для моделирования значений как можно меньшего числа параметров так, что известное допустимое решение рассматриваемой экстремальной задачи становится ее оптимальным решением. Создание методов решения обратных задач оптимизации является актуальной задачей, поскольку на практике существует много ситуаций, когда значения параметров экстремальных задач неизвестны, либо известны частично, но приведены некоторые оценки этих параметров, а также из опыта или практики известно некоторое допустимое решение задачи. В [3] впервые рассмотрены принципы обратной оптимизации для исследования задачи кратчайшего пути с применением l_2 нормы, а также представлена обратная версия задачи линейного программирования. В [4] приведены некоторые применения обратной оптимизации для сетевых задач. Обратным задачам квадратичного программирования посвящена работа [5]. В [6] рассмотрена одна обратная обобщенная задача дробно-линейного программирования. В [7] исследуются математические модели обратных задач на сетях: обобщенной транспортной задачи и дробно-линейной задачи и предложены методы их решения с нормой l_1. Обратный метод оптимизации для транспортной задачи рассмотрен в [8] в соответствии с l_1 нормой. Для известных значений параметров в [9] разработаны математические методы построения оптимальных решений для линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений. В настоящей работе построены математические модели задач обратной оптимизации для моделирования параметров целевой функции, при которых допустимое решение обобщенной линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений, исследованной в [9] для известных значений параметров, становится ее оптимальным решением. Математическая модель линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений для известных параметров имеет вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I^*} c_i x_i \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = \begin{cases} x_i,\ i\in I^*, \\ a_i,\ i\in I\setminus I^* \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} + \sum_{i\in I^*} \lambda_i^p x_i = \alpha_p, \quad p=\overline{1,l}, \tag{3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ (i,j)\in U, \tag{4}$$

$$b_{*i} \le x_i \le b_i^*, i\in I^*, \tag{5}$$

где c_{ij}, c_i, a_i, λ_{ij}^p, λ_i^p, α_p, d_{ij}, b_{*i}, b_i^* – известные (заданные) параметры задачи (1) – (5).

Для моделирования параметров целевой функции задачи (1) – (5) используются принципы обратной оптимизации с применением l_1 и l_2 нормы. Пусть $x^0=(x_{ij}^0,(i,j)\in U;\ x_i^0, i\in I^*)$ – допустимое решение задачи (1) – (5), $x^0\in Z$. Обозначим через α_{ij} и β_{ij} соответственно увеличение и уменьшение параметра c_{ij} целевой функции (1). Положим $\tilde c_{ij}=c_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{ij}$, причем, $\alpha_{ij}\ge 0$, $\beta_{ij}\ge 0$ для всех дуг $(i,j)\in U$, при этом, α_{ij} и β_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения. Кроме этого, положим $\tilde c_i=c_i+\alpha_i-\beta_i$, $i\in I^*$, причем, $\alpha_i\ge 0$, $\beta_i\ge 0$, где α_i и β_i соответственно увеличение и уменьшение параметра c_i целевой функции, которые не могут принимать положительные значения одновременно. Необходимо смоделировать параметры целевой функции (вектор стоимости $\tilde c=(\tilde c_{ij},(i,j)\in U;\tilde c_i, i\in I^*)$) таким образом, чтобы заданное допустимое решение x^0 задачи (1) – (5) стало ее оптимальным решением для новых значений вектора стоимости $\tilde c=(\tilde c_{ij},(i,j)\in U;\tilde c_i, i\in I^*)$. Остальные параметры задачи (1) – (5) не изменяются. Причем, общая корректировка параметров целевой функции является минимальной в соответствии с нормой:

$$l_p=\left\|\tilde c-c\right\|_p=\sum_{(i,j)\in U}\left|\tilde c_{ij}-c_{ij}\right|^p+\sum_{i\in I^*}\left|\tilde c_i-c_i\right|^p.$$

Для моделирования параметров α_{ij}, β_{ij} $(i,j)\in U$ и α_i, β_i, $i\in I^*$ необходимо построить математическую модель обратной задачи в соответствии l_p нормой. Целевая функция математической модели обратной задачи оптимизации имеет вид: $\sum_{(i,j)\in U}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})+\sum_{i\in I^*}(\alpha_i+\beta_i)\to\min$.

Ограничения обратной задачи, в результате решения которой получены новые параметры целевой функции (1) задачи (1) – (5), имеют вид:

$$y_i-\mu_{ij}y_j+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^p r_p\le c_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{ij},\ \alpha_{ij}\ge 0,\ \beta_{ij}\ge 0,\ (i,j)\in B_1;$$

$$y_i-\mu_{ij}y_j+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^p r_p-v_{ij}=c_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{ij},\ v_{ij}\ge 0,\ \alpha_{ij}\ge 0,\ \beta_{ij}\ge 0,$$

$$(i,j)\in B_2;\ y_i-\mu_{ij}y_j+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^p r_p=c_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{ij},\ \alpha_{ij}\ge 0,$$

$$\beta_{ij}\ge 0,\ (i,j)\in B_3;\ -y_i+\sum_{p=1}^{l}\lambda_i^p r_p+w_i=c_i+\alpha_i-\beta_i,$$

$$w_i\ge 0,\ \alpha_i\ge 0,\ \beta_i\ge 0,\ i\in R_1;\ -y_i+\sum_{p=1}^{l}\lambda_i^p r_p-t_i=c_i+\alpha_i-\beta_i,$$

$$t_i\ge 0,\ \alpha_i\ge 0,\ \beta_i\ge 0,\ i\in R_2;\ -y_i+\sum_{p=1}^{l}\lambda_i^p r_p=c_i+\alpha_i-\beta_i,$$

$$\alpha_i\ge 0,\ \beta_i\ge 0,\ i\in R_3,$$

где в зависимости от значений дуговых потоков $x_{ij}^0,(i,j)\in U$ заданного допустимого решения x^0 задачи (1) – (5) множества B_1,B_2,B_3, сформированы следующим образом:

$$B_1=\{(i,j)\in U: x_{ij}^0=0\},\ \ B_2=\{(i,j)\in U: x_{ij}^0=d_{ij}\},$$

$$B_3=\{(i,j)\in U: 0<x_{ij}^0<d_{ij}\}.$$

В зависимости от значений $x_i^0,\ i\in I^*$ заданного допустимого решения x^0 задачи (1) – (5) множества R_1, R_2, R_3 сформированы следующим образом:

$$R_1=\{i\in I^*: x_i^0=b_{*i}\},\ \ R_2=\{i\in I^*: x_i^0=b_i^*\},$$

$$R_3=\{i\in I^*: b_{*i}<x_i^0<b_i^*\}.$$

В результате решения обратной задачи оптимизации получены значения параметров

$$\tilde c_{ij}=c_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{ij}\ \text{ и }\ \tilde c_i=c_i+\alpha_i-\beta_i$$

вектора стоимости $\tilde c=(\tilde c_{ij},(i,j)\in U;\tilde c_i, i\in I^*)$. Параметры $\tilde c=(\tilde c_{ij},(i,j)\in U;\tilde c_i, i\in I^*)$ отличаются от начальных параметров $c=(c_{ij},(i,j)\in U;c_i, i\in I^*)$ целевой функции (1) наименьшим образом и для которых допустимое решение $x^0=(x_{ij}^0,(i,j)\in U;\ x_i^0, i\in I^*)$, $x^0\in Z$ задачи (1) – (5) является оптимальным решением скорректированной задачи с новыми значениями параметров $\tilde c=(\tilde c_{ij},(i,j)\in U;\tilde c_i, i\in I^*)$.

Литература

[1] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи. Минск, 1980.

[2] Пилипчук, Л.А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования. Минск, 2009.

[3] Burton D., Toint Ph. L. // Mathematical Programming. – 1992. Vol. 53. – P. 45–61.

[4] Ahuja R. K., Orlin J. B. // Operation Research. – 2001. Vol. 49. – P. 771–783.

[5] Zhang J., Zhang Li. // Applied Math. & Opt. – 2010. Vol. 61. – No.1. – P. 57–83.

[6] Hladik M. // Eur. J. Oper. Res. – 2010. 205(1). – P. 42–46.

[7] Xu C., Xu X. M. // J. Systems Science & Complexity. – 2013. Vol. 26. No. 3. – P. 350–364.

[8] Jain S., Arya N. // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. Vol. 5. – No.4. – P. 24–27.

[9] Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. C., Pesheva Y.H. // International Journal of Pure and Applied Mathematics (IJPAM). – 2009. Vol. 54. No. 2. – P. 193 – 205.