

Теория ангармонических Болховских осцилляций в массиве световодов

Olesya KOROVAI, Pyotr KHADZHI
 Shevchenko Pridnestrovskii State University
 Institute of Applied Physics
 olesya-korovai@mail.ru

Аннотация — Используя метод связанных мод, рассматриваются ангармонические блоховские осцилляции света в массиве световодов с учетом связи между световодами до третьего порядка. Показано, что траектория пучка является периодической, причем существуют осцилляции траектории в пределах одного периода.

Ключевые слова: ангармонические блоховские осцилляции, массив световодов.

I. ВВЕДЕНИЕ.

В настоящее время массивы световодов притягивают повышенный интерес исследователей, так как они допускают контроль и управление поведением распространяющихся в них сигналов. Теоретическое исследование оптических явлений в массивах взаимодействующих световодов базируется на использовании метода связанных мод. Важной проблемой является массив световодов с оптическими параметрами, которые изменяются в зависимости от номера и положения световода в массиве. В [1] были изучены особенности распространения света в планарных полубесконечных массивах световодов, постоянные распространения которых и константы связи между световодами изменяются по заданным законам в зависимости от номера световода. Была предсказана возможность создания массивов Чебышева I и II рода, Лягерра, Лежандра, Эрмитта, Якоби, Гегенбауэра. В [2] впервые были изучены оптические блоховские осцилляции в бесконечном массиве световодов, постоянная распространения которых растет пропорционально номеру световода. Показано, что траектория оптического пучка, возбуждающего группу световодов с торца, периодически осциллирует. При этом каждый световод взаимодействует только с ближайшими соседями. В настоящее время повышенный интерес представляют более сложные оптические структуры типа зигзагообразных массивов световодов, в которых важную роль играет связь второго порядка. В [3-5] были изучены ангармонические блоховские осцилляции в массиве световодов, в которых постоянная распространения пропорциональна номеру световода в массиве, при учете связи первого и второго порядков. В [5] обобщен результат, ранее полученный в [2], на случай зигзаг-массивов. Было найдено аналитическое решение системы уравнений для амплитуд связанных мод и получена формула для траектории оптического пучка.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Ангармонические блоховские осцилляции являются объектом и нашего интереса. Мы представляем аналитическое решение бесконечной системы уравнений связанных мод для массива, в котором постоянная распространения содержит поправку, пропорциональную номеру световода в массиве, и, кроме того, учитывается одновременно связь первого, второго и третьего порядков. Представленные ниже результаты являются обобщением результатов работ [2-5].

Исходным пунктом является система уравнений связанных мод:

$$\left(i \frac{d}{dz} + \alpha j\right) a_j(z) + \gamma_1 (a_{j-1}(z) + a_{j+1}(z)) + \gamma_2 (a_{j-2}(z) + a_{j+2}(z)) + \gamma_3 (a_{j-3}(z) + a_{j+3}(z)) = 0, (1)$$

где $a_j(z)$ – модальная амплитуда-го световода в зависимости от продольной координаты z , α – поправка к постоянной распространения, γ_1 , γ_2 , и γ_3 – константы связи первого, второго и третьего порядков соответственно. Следуя [5], от амплитуд $a_j(z)$ перейдем к их фурье-образам и получим для них следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(i \frac{d}{dz} + i\alpha \frac{d}{dk}\right) a(k, z) + 2(\gamma_1 \cos k + \gamma_2 \cos 2k + \gamma_3 \cos 3k) a(k, z) = 0. (2)$$

Используя далее граничное условие $a(k, z)|_{z=0} = a^0(k)$, находим общее решение этого уравнения в виде:

$$a(k, z) = a^0(k - \alpha z) \exp \left\{ 2i \frac{\gamma_1}{\alpha} [\sin k - \sin(k - \alpha z)] + 2i \frac{\gamma_2}{\alpha} [\sin 2k - \sin 2(k - \alpha z)] + 2i \frac{\gamma_3}{\alpha} [\sin 3k - \sin 3(k - \alpha z)] \right\}. (3)$$

Полагая далее, что функция $a^0(k)$ имеет резкий пик при $k = k_0$ и разлагая выражение (4) в ряд Тейлора в окрестности $(k - \alpha z) - k_0$, получаем

$$a(k, z) = a^0(k - \alpha z) \exp \{ i\varphi(z) + i(k - \alpha z) - k_0 \psi(z) \}, (4)$$

где

$$\varphi(z) = 2 \frac{\gamma_1}{\alpha} [\sin(k_0 + \alpha z) - \sin k_0] + 2 \frac{\gamma_2}{\alpha} [\sin 2(k_0 + \alpha z) - \sin 2k_0] + 2 \frac{\gamma_3}{\alpha} [\sin 3(k_0 + \alpha z) - \sin 3k_0], (5)$$

$$\psi(z) = 2 \frac{\gamma_1}{\alpha} [\cos(k_0 + \alpha z) - \cos k_0] + 2 \frac{\gamma_2}{\alpha} [\cos 2(k_0 + \alpha z) - \cos 2k_0] + 2 \frac{\gamma_3}{\alpha} [\cos 3(k_0 + \alpha z) - \cos 3k_0]. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (2), находим решения для амплитуды поля $a_j(z)$ и интенсивности $|a_j(z)|^2$, подобные решениям (20) – (21) из [5]. Тогда для траектории оптического пучка на плоскости (j, z) при $j_0 = 0$ и $k_0 = 0$ получаем

$$j(z) = 2 \frac{\gamma_1}{\alpha} [1 - \cos \alpha z] + 2 \frac{\gamma_2}{\alpha} [1 - \cos 2\alpha z] + 2 \frac{\gamma_3}{\alpha} [1 - \cos 3\alpha z]. \quad (7)$$

Из (7) видно, что функция $j(z)$ является периодической в зависимости от координаты z вдоль световода с периодом $z = 2\pi/\alpha$. При этом $j(z = 0) = j(z = 2\pi/\alpha) = 0$. Период монотонно убывает с ростом параметра α . Найдем экстремумы функции $j(z)$ в пределах одного периода $0 \leq z \leq 2\pi/\alpha$, приравнявая нулю производную dj/dz . Положение экстремумов определяется уравнениями

$$\sin \alpha z = 0, \quad (8)$$

$$\gamma_1 - 3\gamma_3 + 4\gamma_2 \cos \alpha z + 12\gamma_3 (\cos \alpha z)^2 = 0. \quad (9)$$

Из (8) следует, что вне зависимости от значений параметров $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ один из экстремумов траектории $j(z)$ располагается при $z = \pi/\alpha$, где $j = 4(\gamma_1 + \gamma_3)/\alpha$. Таким образом, начиная со световода $j = 0$, пучок сначала перемещается от световода к световоду перпендикулярно осям световодов, доходит до световода с номером $j = 4(\gamma_1 + \gamma_3)/\alpha$, после чего снова возвращается к исходному световоду с $j = 0$, пройдя вдоль оси этого световода расстояние $z = 2\pi/\alpha$. На рис. представлена траектория пучка с одним максимумом и одним минимумом в пределах одного периода. Сравнивая этот результат с аналогичным результатом из [5], можно сделать вывод, что при учете связи третьего порядка пучок при своем перемещении сдвигается вправо дополнительно на число световодов Δj , равное $\Delta j = 4\gamma_3/\alpha$.

Из уравнения (9) получаем два решения для положений экстремумов пучка, которые выражаются формулами

$$\cos \alpha z = \frac{1}{6\gamma_3} \left(-\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 9\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_3} \right), \quad (10)$$

$$\cos \alpha z = -\frac{1}{6\gamma_3} \left(\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 9\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_3} \right). \quad (11)$$

Положения экстремумов существенно зависят от значений параметров $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и α . В пределе $\gamma_3 \rightarrow 0$ из (10) приходим к решению, полученному ранее в [5]: $\cos \alpha z = -\gamma_1/(4\gamma_2)$. Отсюда видно, что дополнительные решения для экстремумов существуют только при $\gamma_1/(4\gamma_2) < 1$, которые, как показано в [5], определяются формулами

$z_{1,2} = \frac{1}{2} [\pi \pm \arccos(\gamma_1/(4\gamma_2))]$. В общем случае, когда $\gamma_3 \neq 0$ и выполняется условие $\gamma_1 < \min(4\gamma_2 - 9\gamma_3^2; 3\gamma_3 + \gamma_2^2/(3\gamma_3))$, решения для экстремумов выражаются формулами

$$z_{1,2} = \frac{1}{\alpha} \left[\pi \pm \arccos \left(\frac{1}{6\gamma_3} \left(-\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 9\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_3} \right) \right) \right]. \quad (12)$$

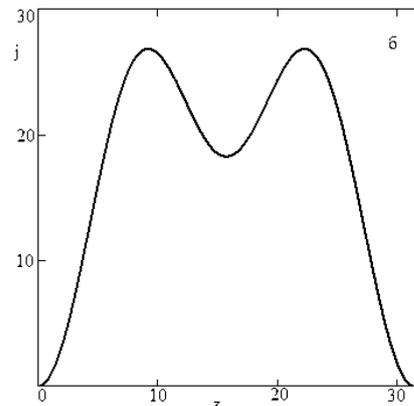
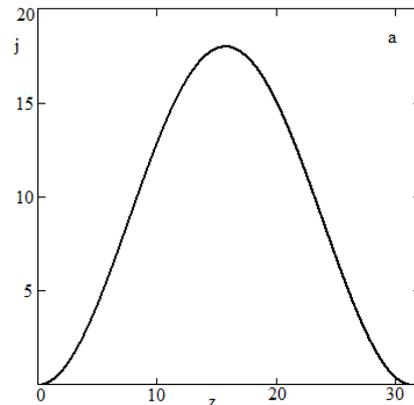
В случае же, если $4\gamma_2 - 9\gamma_3^2 < \gamma_1 < 3\gamma_3 + \gamma_2^2/(3\gamma_3)$,

то возникают еще два дополнительных экстремума, которые располагаются при

$$z_{3,4} = \frac{1}{\alpha} \left[\pi \pm \arccos \left(\frac{1}{6\gamma_3} \left(\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 9\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_3} \right) \right) \right]. \quad (13)$$

III. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис.1 (а-в) представлены графики зависимости $j(z)$ при различных значениях параметров. Видно, что в пределах одного периода могут быть либо два, либо четыре, либо, наконец, шесть экстремумов. Каждый экстремум располагается при определенных значениях переменной z и номера световода j . Это означает, что по мере распространения пучка света имеет место диффузия излучения в направлении, перпендикулярном к направлению распространения. Этот результат свидетельствует о том, что при учете дополнительной связи между световодами (в данном случае связи третьего порядка по сравнению с [5]) пространственная структура траектории пучка обогащается парой дополнительных экстремумов. Полученный результат позволяет утверждать, что при учете всех связей в массиве вплоть до n -го порядка. То центр распространяющегося пучка будет двигаться в пространстве переменных (j, z) по кривой $j(z) = \frac{2}{\alpha} \sum_{s=1}^N \gamma_s (1 - \cos \alpha z)$, которая является естественным обобщением решения (7) и решения (24) из [5]. В этом случае кривая $j(z)$ может демонстрировать $2s$ экстремумов в пределах одного периода.



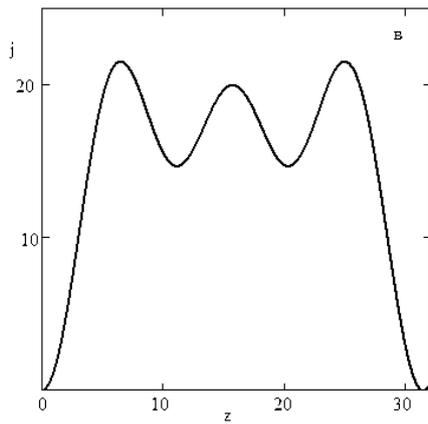


Рис.1 Пространственная структура траектории пучка при значении поправки к постоянной распространения $\alpha = 0,2$ и различных значениях констант связи первого, второго и третьего порядков: а. $\gamma_1 = 0,9$, $\gamma_2 = 0,012$, и $\gamma_3 = 0,001$; б. $\gamma_1 = 0,9$, $\gamma_2 = 0,83$, и $\gamma_3 = 0,015$; в. $\gamma_1 = 0,5$, $\gamma_2 = 0,499$, и $\gamma_3 = 0,05$.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В заключении отметим, что нами рассмотрены ангармонические блоховские осцилляции в массиве световодов с учетом связи между световодами вплоть до третьего порядка. Показано, что траектория пучка является периодической функцией, причем существуют осцилляции траекторий с шестью экстремумами в пределах одного периода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хаджи П.И, Ляхомская К.Д., Орлов О.К. Квантовая электроника, 36, 1 (2006).
- [2] Purchel U., Pertch T., Lederer F. Opt. Lett., 23, 1701 (1998).
- [3] Wang G., Huang J.P., Yu K.W. Opt. Lett., 35, 1908 (2010).
- [4] Dreisow F., Wang G., Heinrich M., Keil R., Tünnermann A., Nolte S., Szameit A. Opt. Lett., 36, 3963 (2011).
- [5] Gozman M.I., Guseynow A.I., Kagan Yu.M., Pavlov A.I., Polishchuk I.Ya. arXiv:1501.06492 (26 Jan. 2015).