Unele aspecte ale integrării funcţiilor raţionale

CORLAT ANDREI AND JARDAN ION

La integrarea funcţiilor raţionale se utilizează metoda coeficienţilor nedeterminaţi. De regulă, se obţine un sistem de n ecuaţii liniare $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$, care pentru un număr de coeficienţi nedeterminaţi mai mare ca trei, necesită eforturi considerabile pentru rezolvare ([1], [2]). Se propune o altă metodă (a se vedea [3], [4]) pentru optimizarea determinării coeficienţilor nedeterminaţi, care o vom ilustra mai jos prin exemple concrete.

Exemplul 1. Să se descompună în sumă de fracţii simple funcţia raţională $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Rezolvare. Avem

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x+3},$$

de unde

$$x-1 = A(x+1)(x+2)(x+3) + Bx(x+2)(x+3)+$$
$$+Cx(x+1)(x+3) + Dx(x+1)(x+2). \quad \textbf{(1)}$$

Nu deschidem parantezele pentru a obţine egalitatea a două polinoame şi ca concluzie sistemul respectiv de patru ecuaţii liniare cu patru necunoscute, însă privim relaţia (1) ca egalitate a două funcţii. Se aplică definiţia respectivă şi se obţine:

pentru $x = 0: \ -1 = A \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 + 0 + 0$, de unde $A = -\dfrac{1}{6}$;

pentru $x = -1: \ -2 = 0 + B \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 0 + 0$, de unde $B = 1$;

pentru $x = -2: \ -3 = 0 + 0 + C \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 0$, de unde $C = -\dfrac{3}{2}$;

pentru $x = -3: \ -4 = 0 + 0 + 0 + D \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1)$, de unde $D = \dfrac{2}{3}$.

(s-au introdus în (1) rădăcinile polinomului $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$). Prin urmare

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x+2)(x+1)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+3}.$$

Exemplul 2. Să se descompună în sumă de fracţii simple funcţia raţională

$f : [2;+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)^2(x+1)}.$

Rezolvare. Avem

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x+1},$$

de unde

$$x^4+1 = Ax(x-1)^2(x+1) + B(x-1)^2(x+1) + Cx^2(x-1)(x+1)+$$
$$+Dx^2(x+1) + Ex^2(x-1)^2. \quad \textbf{(2)}$$

Similar Exemplului 1 se obţine:

pentru $x = 0:\ 1 = 0 + B\cdot 1\cdot 1 + 0 + 0 + 0$, de unde $B = 1$;

pentru $x = 1:\ 2 = 0 + 0 + 0 + D\cdot 1\cdot 2 + 0$, de unde $D = 1$;

pentru $x = -1:\ 2 = 0 + 0 + 0 + 0 + E\cdot 1\cdot 4$, de unde $E = \dfrac{1}{2}$.

Deoarece $x = 0$ este rădăcină de multiplicitatea 2 a polinomului $P(x) = x^2(x-1)^2(x+1)$, urmează că $x = 0$ este rădăcină şi a polinomului $P'(x)$. Diferenţiind (2) şi înlocuind $x = 0$, avem (scriem doar acei termenii, ce nu conţin x):

$$4x^3 = A(x-1)^2(x+1) + B[2(x-1)(x+1) + (x-1)^2] + \ldots$$

pentru $x = 0:\ 0 = A + 1\cdot[-2+1]$, se obţine $A = 1$.

Similar, pentru $x = 1$ (care tot este rădăcină de multiplicitatea 2 a polinomului $P(x)$), avem (scriem doar acei termenii, ce nu conţin $(x-1)$):

$$4x^3 = Cx^2(x+1) + D[2x(x+1) + x^2] + \ldots$$

pentru $x = 1:\ 4 = C\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot[2\cdot 2+1]$, de unde $C = -\dfrac{1}{2}$.

Prin urmare

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Exemplul 3. Să se descompună în sumă de fracţii simple funcţia raţională

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x+1)(x^2+1)^2}.$

Rezolvare. Avem

$$\frac{x^2-2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

de unde

$$x^2-2x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1). \quad \textbf{(3)}$$

Înlocuind în (3) $x = -1$, se obţine:

$$3 = A \cdot 4 + 0 + 0, \text{ de unde } A = \frac{3}{4}.$$

Înlocuind în (3) $x = i$, se obţine:

$$-1 - 2i = 0 + 0 + (Di + E)(i + 1) \Leftrightarrow -1 - 2i = -D + Di + Ei + E,$$

de unde, folosind egalitatea a două numere complexe, se obţine sistemul

$$\begin{cases} -D + E = -1 \\ D + E = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\frac{1}{2} \\ E = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Pentru a determina coeficienţii B şi C, diferenţiem (3) şi scriem doar termenii ce nu se anulează pentru $x = i$:

$$2x - 2 = (Bx + C)(x + 1) \cdot 2x + D(x + 1) + (Dx + E) + \dots$$

Pentru $x = i$:

$$-2 + 2i = (Bi + C)(-2 + 2i) + Di + D + Di + E.$$

Deoarece $D = -\frac{1}{2}$ şi $E = -\frac{3}{2}$, avem

$$-2 + 2i = -2Bi - 2B - 2C + 2Ci - i - 2$$

$$3i = (-2B - 2C) + i(-2B + 2C)$$

de unde rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2B + 2C = 0 \\ -2B + 2C = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{3}{4} \\ B = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Prin urmare

$$\frac{x^2 - 2x}{(x + 1)(x^2 + 1)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{x + 1} + \frac{-\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{(x^2 + 1)^2}.$$

Descompunerea în sumă de fracţii simple a funcţiei raţionale se utilizată cu succes în următoarele compartimente ale matematicii superioare: serii numerice, teoria funcţiilor de variabilă complexă, ecuaţii diferenţiale, calcul operaţional etc.

References

[1] ДАНКО П.Е., ПОПОВ А.Г., КОЖЕВНИКОВА Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, Москва: Высшая школа, 1986. 304 с.

[2] РЯБУШКО А.П., БАРХАТОВ В.В., ДЕРЖАВЕЦ В.В., ЮРУТЬ И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 2, Минск: Высшая школа, 1991. 352 с.

[3] КУДРЯВЦЕВ Л.Д., КУТАСОВ А.Д., ЧЕХЛОВ В.И., ШАБУНИН М.И. Сборник задач по математическому анализу, т. 2, Москва: Физ-мат лит., 2003.

[4] https://lectii.utm.md/courses/matematica-de-liceu-recapitulare-si-completari/ (T4: Integrarea expresiilor raţionale și trigonometrice).

(CORLAT Andrei, JARDAN Ion) Technical University of Moldova. Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Chişinău, Republic of Moldova

E-mail address: `andrei.corlat@isa.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md`