Aplicarea monotoniei funcţiilor la rezolvarea ecuaţiilor

CORLAT Andrei and JARDAN Ion

În procesul rezolvării ecuaţiilor se utilizează diferite proprietăţi ale funcţiilor elementare: mărginirea, periodicitatea, paritatea, monotonia etc ([1], [2], [3]). Proprietatea de monotonie se întâlneşte mai des, de exemplu, dacă se cere de rezolvat ecuaţia $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ şi $f(x)$ este o funcţie strict crescătoare (descrescătoare), atunci ea poate primi valoarea c în cel mult un punct. Punctul respectiv, de regulă, se determină uşor.

Vom ilustra metoda prin câteva exemple.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+1} = 7. \quad \textbf{(1)}$$

Soluţie. În $DVA = [-\frac{1}{2}; +\infty)$ al ecuaţiei (1), membrul stâng al ecuaţiei reprezintă o funcţie strict crescătoare $f(x) = \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+1}$ (ca sumă a două funcţii strict crescătoare), iar membrul drept este o constantă. Prin urmare, există cel mult o valoare a lui x, pentru care $f(x) = 7$. Uşor de observat, că $x = 4$. Deci $S = \{4\}$.

Exemplul 2. Să se rezolve ecuaţia

$$12^x + 5^x = 13^x. \quad \textbf{(2)}$$

Soluţie. Atât membrul din stânga ecuaţiei (2), cât şi cel din dreapta reprezintă funcţii strict crescătoare în $DVA = \mathbb{R}$, ceea ce nu ne dă nimic. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei (2) la 13^x, se obţine ecuaţia echivalentă

$$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1. \quad \textbf{(3)}$$

Membrul din stânga al ecuaţiei (3) reprezintă o funcţie strict descrescătoare (ca sumă a două funcţii strict descrescătoare) pe $\mathbb{R}$, iar cel din dreapta o constantă. Rămâne de observat că $x = 2$ este unica soluţie a acestei ecuaţii. Deci $S = \{2\}$.

Exemplul 3. Să se rezolve ecuaţia

$$3^x = 10 - log_2 x. \quad \textbf{(4)}$$

Soluţie. În $DVA = \mathbb{R}_+^*$ al ecuaţiei (4) membrul din stânga reprezintă o funcţie strict crescătoare, iar cel din dreapta este o funcţie strict descrescătoare. Rezultă că ecuaţia (4) poate avea cel mult o soluţie (graficele unei funcţii strict crescătoare şi a unei funcţii strict descrescătoare se pot intersecta în cel mult un punct). Uşor de observat, că soluţia acestei ecuaţii este $x = 2$. Deci $S = \{2\}$.

Exemplul 4. Să se rezolve ecuaţia

$$log_2(x \cdot 2^{x^2}) = 1 + 2x. \quad \textbf{(5)}$$

Soluţie. În $DVA = \mathbb{R}_+^*$ ecuaţia (5) este echivalentă cu ecuaţia

$$log_2 x + x^2 = 1 + 2x$$

sau

$$(x-1)^2 - 2 + log_2 x = 0. \quad \textbf{(6)}$$

Pentru $x \in [1; +\infty)$ funcţiile $f(x) = (x-1)^2 - 2$ şi $g(x) = log_2 x$ sunt funcţii strict crescătoare, şi prin urmare ecuaţia (6) are cel mult o soluţie ($x = 2$).

Pentru $x \in (0; 1)$ avem $0 < (x-1)^2 < 1$, $log_2 x < 0$ şi, prin urmare, $(x-1)^2 + log_2 x - 2 < 0$, adică pentru $x \in (0; 1)$ ecuaţia (6) nu are soluţii. Astfel unica soluţie a ecuaţiei enunţate este $x = 2$. Deci $S = \{2\}$.

Exemplul 5. Să se rezolve ecuaţia

$$(2x-1)\left(2 + \sqrt{(2x-1)^2 + 3}\right) + 3(x-1)\left(2 + \sqrt{9(x-1)^2 + 3}\right) = 0. \quad \textbf{(7)}$$

Soluţie. În $DVA = \mathbb{R}$ ecuaţia (7) se scrie

$$(2x-1)\left(2 + \sqrt{(2x-1)^2 + 3}\right) = -3(x-1)\left(2 + \sqrt{9(x-1)^2 + 3}\right). \quad \textbf{(8)}$$

Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t\left(2 + \sqrt{t^2 + 3}\right)$. Deoarece derivata $f'(t) = 2 + \sqrt{t^2 + 3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(t)$ este o funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci din (8), rezultă $f(2x-1) = f(-3(x-1))$, şi deoarece f este o funcţie strict crescătoare, urmează $2x - 1 = -3(x-1)$, de unde $x = \dfrac{4}{5}$. Deci $S = \{\dfrac{4}{5}\}$.

References

[1] COHAL T., IUREA G., POPA G. *Probleme de matematică pentru clasa X*, Piteşti: Paralela 45, 2010.

[2] www.math.md/school.

[3] ТКАЧУК В.В. Математика абитуриенту, Москва: МЦНМО, 2006. 960 с.

(CORLAT Andrei, JARDAN Ion) Technical University of Moldova. Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Chişinău, Republic of Moldova

E-mail address: andrei.corlat@isa.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md