CU PRIVIRE LA CORECTITUDINEA UNOR PROBLEME ALE FIZICII MATEMATICE CE SE REDUC LA ECUAŢII DE TIP HIPERBOLIC

Iurie BALTAG

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se studiază problema lui Cauchy pentru ecuaţiile de tip hiperbolic. Corectitudinea problemei lui Cauchy va fi asigurată, dacă vor fi stabilite existenţa, unicitatea şi dependenţa continuă a soluţiei problemei de condiţiile iniţiale. Cu acest scop se deduc estimaţii apriorice ale soluţiilor acestei probleme în anumite condiţii asupra coeficienţilor ecuaţiei şi asupra condiţiilor iniţiale. Se expun condiţiile suficiente asupra coeficienţilor şi condiţiilor iniţiale ale problemelor studiate, pentru ca asemenea estimaţii să fie obţinute.*

Cuvinte cheie: *Problema lui Cauchy, corectitudinea problemei, ecuaţie hiperbolică, estimaţii apriorice.*

Un şir de probleme ale fizicii matematice se reduc la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip hiperbolic. Exemple de aşa ecuaţii sunt ecuaţia propagării undelor, ecuaţia oscilaţiilor membranei, ecuaţiile gazo-dinamicii ş.a. Un aspect foarte important al problemelor fizicii matematice atât din punct de vedere teoretic, cît şi practic constă în stabilirea corectitudinii acestor probleme. Adică în stabilirea faptului, că modelul matematic al problemei fizice descrie în realitate soluţia ei.

Se studiază următoarea problemă a lui Cauchy:

$$P(x;t;\partial_x;\partial_t)u = 0, x \in R^1, t > 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u(x;0)}{\partial t^k} = f_k(x), k = 0,1,\dots,n-1 \tag{2}$$

Aici ecuaţia (1) este strict hiperbolică, adică operatorul *P* este un operator liniar şi are forma următoare: $P = P_n + Q$, unde $P_n(x;t;\mu;\lambda)$ este un polinom omogen de gradul n cu rădăcini reale $\lambda_1(x;t;\mu),\dots,\lambda_n(x;t;\mu)$ diferite două cîte două pentru fiecare $\mu \neq 0$, iar Q este un polinom de gradul $n-1$.

Corectitudinea problemei lui Cauchy (1), (2) va fi asigurată, dacă pentru soluţiile ei vor fi stabilite estimaţii apriorice de forma următoare:

$$\|u(x;t)\|_p \le \sum_{k=o}^{n-1} C_k(t)\|f_k(x)\|_p, \; p \in [1;\infty], \tag{3}$$

unde $\|f(x)\|_p = \begin{cases} (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}, \; p \in [1;\infty) \\ \sup\limits_{x \in R} |f(x)|, p = \infty \end{cases}$.

Un interes deosebit prezintă cazul p = ∞. În acest caz se obţin următoarele estimaţii:

$$|u(x;t)| \le \sum_{k=o}^{n-1} C_k(t)|f_k(x)| \tag{4}$$

Efectuînd transformările corespunzătoare, ecuaţia (1) se reduce la un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi, care poate fi scris apoi în următoarea formă matricelă:

$Z_t = AZ_x + BZ$, unde matricea A este o matrice diagonală ce conţine pe diagonala principală rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\lambda_1(x;t;\mu),...,\lambda_n(x;t;\mu)$.

De aici se obţin estimaţii pentru funcţia vectorială *Z* de unde rezultă estimaţia (4).

În cazul ecuaţiei de ordinul doi coieficienţii căreia nu depind de timp se pune problema de a obţine estimaţii de tip (4) pentru soluţia problemei (1), (2) fără a implica derivatele condiţiilor iniţiale, evidenţiind dependenţa explicită a constantelor de estimare de timpul t.

Cu acest scop a fost examinată problema lui Cauchy pentru ecuaţia oscilaţiilor într-un mediu variabil:

$$u_{tt} - a(x)u_{xx} - q(x)u = o,\ u(x;0) = f_0(x),\ u_t(x;0) = f_1(x) \qquad (5),$$

unde funcţia ce descrie mediul *a(x)* şi potenţialul *q(x)* verifică condiţiile $0 < a_0 \le a(x) \le a_1,\ q(x) \ge 0$.

Pentru soluţiile acestei probleme au fost obţinute estimaţii de tip (4), în care constantele C_1 şi C_2 depind de funcţia *a(x)* şi derivatele ei până la ordinul doi inclusiv şi de potenţialul *q(x)* .

De menţionat, că în raport cu timpul *t* constantele C_1 şi C_2 admit o creştere ce nu depăşeşte t^2 .

Aparte s-a cercetat cazul, când potenţialul *q(x)* admite şi valori negative. În acest caz estimaţiile (4) se îndeplinesc cu constantele de estimare C_1 şi C_2, care admit o creştere exponenţială în raport cu timpul *t*.

În cazul, când coeficienţii ecuaţiei (5) sînt funcţii variabile şi în timp au fost obţinute estimaţii de tip (4), în care constantele de estimare C_1 şi C_2 admit o creştere exponenţială în raport cu timpul *t* şi depind de coeficienţii ecuaţiei şi derivatele lor până la ordinul cinci inclusiv.

În continuare a fost cercetată problema lui Cauchy, în care ecuaţia (1) este o ecuaţie de ordin înalt cu coeficienţi constanţi. În acest caz estimaţiile de tip (4) au fost obţinute pentru $p \in (1;\infty)$, cu constantele de estimare $C_k, k = 0,1,...,n-1$ ce admit o creştere exponenţială în raport cu timpul *t*.

Dacă ecuaţia (1) este cu coeficienţi constanţi şi reprezintă o ecuaţie omogenă de gradul *n*, adică operatorul $Q \equiv 0$, atunci estimaţiile (4) pot fi obţinute pentru $p \in (1;\infty)$, unde constantele de estimare $C_k, k = 0,1,...,n-1$ verifică inegalitatea $C_k \le ct^{n-1}$, iar c este o constantă ce nu depinde de timpul *t*.

Bibliografie

1. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* Москва, Мир, 1977.
2. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* Москва, Мир, 1964.
3. Балтаг Ю. *Об ограниченности решения задачи Коши для одномерных гиперболических уравнений второго порядка*. Кишинев, Деп. Рук. в МНИИНТИ, N. 1117-M.89, 1989.
4. Эффендиев М. *Строго гиперболические уравнения высокого порядка в пространствах* L_p. Диф. ур. 27, с. 312-320, 1991.
5. Балтаг Ю. *Об* L_p*-ограниченности разрешающего оператора задачи Коши для одномерного гиперболического уравнения высокого порядка*. Кишинев, Известия АН РМ, N. 4, 1992.