Secţia a V-a. INFORMATICĂ, STATISTICĂ ŞI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

MONOTONIA METODELOR „VOTURI-DECIZIE" CU DIVIZOR

Prof. univ. dr. hab. Ion BOLUN, ASEM
bolun@ase.md

Monotonicity of multi-optional „votes-decision" with divisor methods (d'Hondt, Sainte-Laguë, Huntington-Hill and General Linear Divisor) to the modification of the value of all input parameters, both separately and in combination, are investigated. It is shown that these methods are invariant to the total number of votes and are monotone to the total number of seats, to the number of votes cast for a party and to the coverage, but are non-monotone to the voter preferences and to the number of parties.
***Key words**: „votes-decision" methods, multi-optional decisions, disproportionality, monotonicity.*

1. Introducere

Monotonia metodelor „voturi-decizie" (VD) influenţează folosirea acestora în practică. Aspectele de monotonie a metodelor VD sunt cercetate în mai multe lucrări, inclusiv [1-5, 8]. În [4] este definită cerinţa generală de monotonie a metodelor VD, având ca reper puterea de influenţă a părţilor implicate. Unele aspecte de monotonie a metodelor Hamilton, Divizor liniar general (DLG) şi Mixtă sunt cercetate în [5]. O gamă largă de aspecte de monotonie a metodelor VD multiopţionale cu reprezentare proporţională (RP) sunt formalizate în [9].

În lucrare, este cercetată caracteristica de monotonie a metodelor VD multiopţionale cu divizor d'Hondt, Sainte-Laguë, Huntington-Hill şi Divizor liniar general, în baza problemei de alegere a deputaţilor, în Parlament, pe liste de partid – unul din cele mai frecvente cazuri de luare a deciziilor colective multiopţionale prin votare cu reprezentare proporţională.

2. Consideraţii preliminare

Problema de alocare a mandatelor include mărimile [6]: numărul total M de mandate în organul electiv; numărul $n > 1$ de partide ce au depăşit pragul electoral (cazul $n = 1$ este trivial); numărul total V de voturi acumulate de cele n partide; numărul total V_i de voturi acumulate de partidul i, $i = \overline{1,n}$ la $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$; numărul x_i de mandate, alocate partidului i, $i = \overline{1,n}$. De asemenea, în diferite reguli, VD se folosesc şi aşa mărimi ca: $Q = V/M$, $d = M/V$ – valoarea unui vot, măsurată în mandate şi $a_i = \lfloor V_i/Q \rfloor$ – cota de jos pentru partidul i.

Astfel, la caracterizarea rezultatelor votării se folosesc parametrii: M; n; V; $V_i, i = \overline{1,n}$ şi x_i, $i = \overline{1,n}$. Din aceştia, la datele de intrare ale problemei de alocare a mandatelor se referă valorile mărimilor M, V, n şi V_i, $i = \overline{1,n}$, iar la cele de ieşire – valorile mărimilor x_i, $i = \overline{1,n}$.

În funcţie de aplicare, metodele VD trebuie să corespundă anumitor cerinţe. Una din acestea, larg cunoscută, este cerinţa de monotonie.

Definiţia 2.1 [4]. O metodă VD este monotonă, dacă aceasta asigură caracterul non-descrescător al funcţiilor $x_i(D_i)$, $i = \overline{1,n}$, unde

$$D_i = dV_i = MV_i/V, \ i = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

este puterea de influenţă a partidului $i = \overline{1,n}$ în organul electiv, delegată de cele V_i voturi ale alegătorilor (valoarea sumară a celor V_i voturi).

Astfel, D_i depinde de mărimile d şi V_i sau, ținând cont de relația dintre mărimile d, M şi V, de mărimile M, n, V_i, $i=\overline{1,n}$ şi $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$. În [4] este demonstrat, de asemenea, că evitarea paradoxurilor Alabama, al Populației şi cel al Noului stat se încadrează în asigurarea cerinței de monotonie definite.

De menționat că diversele situații de non-monotonie a unor metode VD, ce pot fi la votări consecutive, se obțin prin modificarea (mărirea sau micşorarea) valorii unuia sau a mai multora din parametrii de intrare M, V, n şi V_i, $i=\overline{1,n}$ ai scrutinului. Asemenea modificări pot şi elementare sau complexe.

Definiția 2.2 [9]. Elementară se consideră orice modificare a valorii unui parametru sau categorie (în cazul V_i, $i=\overline{1,n}$) de parametri de intrare, care implică cel mult o alternativă de modificare şi a valorilor altor parametri de intrare. Celelalte modificări de valori ale parametrilor de intrare se consideră complexe – modificări constituite din două sau mai multe modificări elementare.

Definiția 2.3 [9]. Un parametru de intrare se consideră independent, dacă modificarea valorii acestuia este una elementară.

La parametrii de intrare independenți, se referă: M, V şi V_i, $i=\overline{1,n}$.

Definiția 2.4 [9]. Un parametru de intrare se consideră dependent, dacă modificarea valorii acestuia poate fi complexă.

Parametrul de intrare dependent este n.

Din multitudinea de alternative posibile, în [9] este examinată monotonia metodelor VD față de modificările elementare ale valorilor parametrilor de intrare: 1) numărul total de mandate; 2) numărul total de voturi; 3) numărul de voturi acumulate de un partid; 4) preferințele decidenților; 5) comasarea de partide; 6) divizarea de partide; 7) aria de cuprindere. Mai concret, aceste situații sunt descrise în ss. 3-9. În s. 10.1, sunt sistematizate aspectele privind monotonia metodelor cu divizor față de unul sau mai mulți parametri de intrare, iar în s. 10.2, este descris un caz de modificare complexă a valorii unui parametru de intrare.

Unele proprietăți generale ale metodelor VD monotone sunt definite în [9]. O parte din acestea sunt redate de afirmațiile 2.1, 2.2 şi consecințele 2.1-2.6.

Consecința 2.1. La demonstrarea calității de monotonie a metodelor VD, este suficient de demonstrat cazul de creştere a valorii parametrului de intrare independent respectiv sau de descreştere a acesteia.

Consecința 2.2. La demonstrarea calității de monotonie a metodelor VD, este suficient de demonstrat cazul de creştere a valorii parametrului de intrare respectiv sau de descreştere a acesteia cu o singură unitate.

Afirmația 2.1. Dacă o metodă VD este monotonă față de fiecare din parametrii unui set, atunci ea este monotonă şi față de setul de parametri în cauză în ansamblu.

Afirmația 2.2. Dacă o metodă VD este non-monotonă față de cel puțin unul din parametrii unui set, atunci ea este, în caz general, non-monotonă şi față de setul de parametri în ansamblu.

Consecința 2.3. La demonstrarea calității de monotonie a metodelor VD, este suficient de demonstrat monotonia acestora față de fiecare parametru de intrare aparte.

Consecința 2.4. Pentru ca o metodă VD să fie monotonă față de numărul total de voturi V, este necesar şi suficient ca funcțiile $x_i(V)$, $i=\overline{1,n}$ să fie invariante.

Consecința 2.5. Pentru ca o metodă VD să fie monotonă față de preferințele decidenților partidelor ce țin de mulțimea K, la păstrarea intactă a valorilor tuturor celorlalți parametri de intrare, este necesar şi suficient ca funcțiile $x_k(V_k)$, $k \in K$ să fie non-descrescătoare, iar cele $x_i(V_k,\ k \in K)$, $i=\overline{1,n} \setminus K$ – invariante.

Consecința 2.6. Pentru ca o metodă VD să fie monotonă față de numărul de partide n, la modificarea concomitentă a valorilor mărimilor $V_k(n)$, $k \in K$ şi păstrarea intactă a valorii mărimii $V(n)$, este necesar şi suficient ca funcțiile $x_k(V_k)$, $k \in K$ să fie non-descrescătoare, iar cele $x_i(V_k,\ k \in K)$, $i = \overline{1,n} \backslash K$ – invariante.

3. Monotonia față de numărul total de mandate

Să cercetăm cazul modificării doar a numărului total de mandate M, toți ceilalți parametri de intrare rămânând fără schimbare. Cazul poate reprezenta, de exemplu, modificarea numărului de deputați în Parlament.

Afirmația 3.1. Monotonia metodelor VD față de numărul total de mandate se reduce la imunitatea acestora față de paradoxul Alabama.

Într-adevăr, conform [3, 5], paradoxul Alabama nu are loc, dacă la $V_i^{'} = V_i$, $i = \overline{1,n}$ şi $M' = M + g$, unde g este un număr natural (întreg, mai mare ca zero), au loc relațiile $x_i^{'} \geq x_i$, $i = \overline{1,n}$.

În cazul paradoxului Alabama, se compară două votări consecutive, ce se deosebesc doar prin creşterea numărului total de mandate M (de la M la $M' > M$). Totodată, ținând cont de consecința 2.1, odată cu imunitatea față de paradoxul Alabama, metoda VD respectivă este monotonă şi față de descreşterea M – caz ce ar putea fi denumit de „Austeritate”. ■

Consecința 3.1. Sunt monotone față de numărul total de mandate metodele VD: d'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill şi Divizor liniar general.

Într-adevăr, conform [3, 6], sunt imune față de paradoxul Alabama metodele d'Hondt, Sainte-Laguė şi Huntington-Hill, iar conform [5] – și metoda DLG. ■

De asemenea, după cum este demonstrat în [5], în caz general, metoda Hamilton este imună la paradoxul Alabama doar la $n = 2$.

4. Invarianța față de numărul total de voturi

Să cercetăm cazul modificării numărului total de voturi de la $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ la $V' = CV = V_1^{'} + V_2^{'} + ... + V_n^{'}$ şi $V_i^{'} = CV_i$, $i = \overline{1,n}$, unde C = const este un astfel de număr real nenegativ că mărimile $V_i^{'}$, $i = \overline{1,n}$ sunt numere întregi. Dacă $C > 1$, atunci cazul ar putea fi denumit de „Populare” (de exemplu, creşterea numărului populației cu păstrarea proporțională a preferințelor), iar dacă $C < 1$, atunci acesta ar putea fi denumit de „Depopulare” (de exemplu, reducerea numărului populației cu păstrarea proporțională a preferințelor).

Afirmația 4.1. Metoda Divizor liniar general este monotonă față de numărul total de voturi, fiind invariantă.

Într-adevăr, conform metodei DLG [6], are loc

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{V_i}{cu_i + 1} > \frac{V_k}{cu_k + 1} \tag{4.1}$$

unde c poate fi orice număr real nenegativ. Pentru votarea $V_i^{'} = CV_i$, $i = \overline{1,n}$, regula (4.1) ia forma

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{CV_i}{cu_i + 1} > \frac{CV_k}{cu_k + 1} \tag{4.2}$$

care, după reducerea constantei C, se transformă în (4.1). Deci, la modificarea proporțională a numărului de voturi acumulate de cele n partide, distribuirea celor M mandate între partide nu se modifică (este invariantă): $x_i^{'} = x_i$, $i = \overline{1,n}$. Astfel, se îndeplinesc condițiile consecinței 2.4. ■

Consecința 4.1. Metodele d'Hondt şi Sainte-Laguė sunt monotone față de numărul total de voturi, fiind invariante.

Într-adevăr, metodele d'Hondt şi Sainte-Laguė sunt cazuri particulare ale metodei DLG la $c = 1$ şi, respectiv, $c = 2$. ■

Afirmația 4.2. Metoda Huntington-Hill este monotonă față de numărul total de voturi, fiind invariantă.

Într-adevăr, fie aceleaşi două scrutine ca şi la afirmația 4.1. Conform metodei Huntington-Hill [3], au loc inegalitățile

$$\sqrt{(x_i-1)x_i} \le \frac{V_i}{G} < \sqrt{x_i(x_i+1)}\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{4.3}$$

unde G este divizorul care asigură egalitatea $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M$. Pentru votarea $V_i^{'} = CV_i$, $i=\overline{1,n}$, inegalitățile (4.3) iau forma

$$\sqrt{(x_i^{'}-1)x_i^{'}} \le \frac{V_i^{'}}{G'} < \sqrt{x_i^{'}(x_i^{'}+1)}\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{4.4}$$

unde G' este divizorul care asigură egalitatea $x_1^{'}+x_2^{'}+\ldots+x_n^{'}=M$. Să examinăm divizorul $G' = CG$. În asemenea caz, au loc egalitățile $V_i^{'}/G' = CV_i/CG = V_i/G,\ i=\overline{1,n}$; deci au loc şi egalitățile $x_i^{'}=x_i,\ i=\overline{1,n}$. Astfel, se îndeplinesc condițiile consecinței 2.4.■

Afirmația 4.3. Metoda Hamilton este monotonă față de numărul total de voturi, fiind invariantă.

Într-adevăr, conform metodei Hamilton [6], au loc egalitățile $x_i = a_i + \Delta x_i$, $i=\overline{1,n}$, unde $\Delta x_i = 1$, pentru acele ΔM partide care au cele mai mari valori ale $\Delta V_i = V_i - a_iQ$, şi $\Delta x_i = 0$, pentru celelalte $n - \Delta M$ partide. Ținând cont de relațiile $V_i^{'}=CV_i,\ i=\overline{1,n}$, avem $Q' = V'/M = CV/M = CQ$, $a_i^{'}=\lfloor V_i^{'}/Q'\rfloor = CV_i/CQ = V_i/Q = a_i$, $i=\overline{1,n}$. De asemenea, avem $\Delta V_i^{'} = V_i^{'} - a_i^{'}Q' = CV_i - a_iCQ = C\Delta V_i$, $i=\overline{1,n}$. Deci, relațiile mai mare-mai mic între mărimile $\Delta V_i^{'}$, $i=\overline{1,n}$ au loc pentru aceleaşi partide, ca şi cele între mărimile ΔV_i, $i=\overline{1,n}$, adică $\Delta x_i^{'}=\Delta x_i$, $i=\overline{1,n}$. Astfel, au loc egalitățile $x_i^{'}=x_i$, $i=\overline{1,n}$, îndeplinindu-se condițiile consecinței 2.4.■

5. Monotonia față de numărul de voturi acumulate de un partid

Să cercetăm cazul modificării doar a numărului de voturi acumulate de unul din cele n partide cu modificarea respectivă şi a numărului total de voturi V, toți ceilalți parametri rămânând fără schimbare. Cazul poate reprezenta, de exemplu, modificarea doar a numărului alegătorilor ce preferă un anumit partid sau doar a numărului alegătorilor (populației) unui stat dintr-o comunitate.

Afirmația 5.1. Monotonia metodelor VD, față de numărul de voturi acumulate de un partid, se reduce la imunitatea acestora față de paradoxul Populației.

Într-adevăr, conform [3, 5], paradoxul Populației are loc, dacă la $V_i^{'}=V_i$ ($i = 1,\ldots,n\backslash k$), $V_k^{'}>V_k$ şi $M' = M$ are loc relația $x_k^{'}<x_k$.

În cazul acestui paradox, se compară două votări consecutive, ce se deosebesc doar prin creşterea numărului total de voturi acumulate de un partid, fie de la V_k la $V_k^{'}>V_k$. Totodată, ținând cont de consecința 2.1, odată cu imunitatea față de paradoxul Populației, metoda VD respectivă este monotonă şi față de descreşterea V_k. ■

Consecința 5.1. Sunt monotone față de numărul de voturi acumulate de un partid metodele VD d'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill și Divizor liniar general, iar cea Hamilton, în caz general, – doar la $n = 2$.

Într-adevăr, conform [3, 6], sunt imune față de paradoxul Populației metodele d'Hondt, Sainte-Laguė şi Huntington-Hill, iar conform [5] – și metoda DLG. De asemenea, conform [5] în caz general, metoda Hamilton este imună față de paradoxul Populației doar la $n = 2$. ■

6. Monotonia față de preferințele decidenților

Să cercetăm cazul modificării unora din valorile parametrilor V_i, $i=\overline{1,n}$, la păstrarea valorilor parametrilor M, V şi n, adică $M' = M$, $V' = V$ şi $n' = n$. Cazul poate reprezenta, de exemplu, modificarea preferințelor populației, în funcție de noile programe de activitate ale partidelor, sau redefinirea hotarelor teritoriale ale unor zone geografice, dar fără modificarea numărului acestora.

Afirmația 6.1. Metoda Divizor liniar general poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților.

Într-adevăr, fie: $V_i^{'} = V_i$, $i = 1, \ldots, n \backslash (k, j)$; $V_k < V_k^{'} = V_k + v_k$; $V_j > V_j^{'} = V_j - v_j$; $v_k = v_j$. Aici $v_k > 0$ reprezintă creşterea valorii mărimii V_k în al doilea scrutin față de primul din contul reducerii cu aceeaşi valoare a mărimii V_j. De asemenea, fie $x_i > a_i$ şi, totodată, $x_k = a_k$ şi $x_j^{'} = x_j = a_j$. Atunci, ținând cont de consecința 2.5, pentru ca metoda DLG să nu fie monotonă față de preferințele decidenților partidului i, adică să aibă loc, de exemplu, $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile

$$\frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} > \frac{V_k}{cx_k + 1} \text{ şi } \frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} < \frac{V_k + v_k}{cx_k + 1}, \tag{6.1}$$

care ar conduce la aceea că cel puțin un mandat de la partidul i ar trece la partidul k. În condițiile menționate, inegalitățile (6.1), după cum se poate uşor observa, pot avea loc. Deci, metoda DLG poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților partidului i. În mod similar, aceasta poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților a două sau mai multe partide.■

Exemplul 6.1. Fie cazul: $M = M' = 20$; $n = n' = 3$; $V_1 = V_1^{'} = 521$; $V_2 = 419$; $V_3 = 60$; $V_2^{'} = 423$; $V_3^{'} = 56$; $c = 3$. Atunci, obținem $Q = (521 + 419 + 60)/20 = 50 = Q' = (521 + 423 + 56)/20$ şi alte rezultate prezentate în tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

Calcularea valorilor x_i, $x_i^{'}$, $i = 1, 2, 3$ pentru exemplul 6.1

Parametrul	Partidul		
	1	2	3
V_i	521	419	60
a_i	10	8	1
F_i	16,81	16,76	15
Δx_i	1	0	0
x_i	11	8	1

Parametrul	Partidul		
	1	2	3
$V_i^{'}$	521	423	56
$a_i^{'}$	10	8	1
$F_i^{'}$	16,81	16,92	14
$\Delta x_i^{'}$	0	1	0
$x_i^{'}$	10	9	1

În tabelul 6.1, valorile mărimilor x_i, $x_i^{'}$, $i = 1, 2, 3$ sunt calculate conform algoritmului DLG propus în [6]. Aici, de exemplu, $a_i = \lfloor V_i/Q \rfloor$; $F_i = V_i/(3a_i + 1)$; $x_i = a_i + \Delta x_i$. Din tabel, se poate observa că, deşi preferințele decidenților pentru partidul 1 sunt aceleaşi în ambele scrutine ($V_1 = V_1^{'} = 521$), numărul de mandate ce-i revin acestuia, conform rezultatelor celui de-al doilea scrutin ($x_1^{'} = 10$), este mai mic decât în primul scrutin ($x_1 = 11$), confirmând non/monotonia metodei DLG la $c = 3$ față de preferințele decidenților partidului 1.

Consecința 6.1. Metodele d'Hondt şi Sainte-Laguė pot să nu fie monotone față de preferințele decidenților.

Justețea consecinței 6.1 pentru metodele d'Hondt şi Sainte-Laguė rezultă din faptul că acestea sunt cazuri particulare ale metodei DLG [6].

Afirmația 6.2. Metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților.

Într-adevăr, fie aceleaşi două scrutine ca şi la afirmația 6.1. Să examinăm cazul $x_i > a_i$, $x_k = a_k$ şi $x_j^{'} = x_j = a_j$. Atunci, ținând cont de consecința 2.5, pentru ca metoda Huntington-Hill să nu fie monotonă față de preferințele decidenților partidului *i*, adică să aibă loc, de exemplu, $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile

$$\sqrt{(x_i-1)x_i} \le \frac{V_i}{G} < \sqrt{x_i(x_i+1)}\ ;\ \sqrt{(x_k-1)x_k} \le \frac{V_k}{G} < \sqrt{x_k(x_k+1)}\ ;$$
$$\frac{V_i}{G'} < \sqrt{(x_i-1)x_i}\ ;\ \sqrt{x_k(x_k+1)} \le \frac{V_k^{'}}{G'}, \qquad (6.2)$$

unde G şi G' sunt divizorii care asigură egalitățile $x_1 + x_2 + ... + x_n = M$ şi, respectiv, $x_1^{'} + x_2^{'} + ... + x_n^{'} = M$. Ținând cont de datele inițiale, inclusiv cele $V_i^{'} = V_i$ şi $V_k^{'} = V_k + v_k$, $v_k > 0$, se poate uşor observa posibilitatea îndeplinirii condițiilor (6.2). Deci, metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților partidului *i*. În mod similar, metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților a două sau mai multe partide. ■

Exemplul 6.2. Fie cazul exemplului 6.1, cu excepția mărimii *c*, care aici nu se foloseşte. Calculele, cu aplicarea metodei Huntington-Hill, sunt prezentate în tabelul 6.2.

Tabelul 6.2

Calcularea valorilor x_i, $x_i^{'}$, i = 1, 2, 3 pentru exemplul 6.2

Parametrul	Partidul		
	1	2	3
V_i	521	419	60
$V_i/49{,}5$	10,525	8,465	1,212
$\sqrt{g_i(g_i+1)}$	10,488	8,485	1,414
x_i	11	8	1

Parametrul	Partidul		
	1	2	3
$V_i^{'}$	521	423	56
$V_i^{'}/49{,}7$	10,483	8,511	1,127
$\sqrt{g_i^{'}(g_i^{'}+1)}$	10,488	8,485	1,414
$x_i^{'}$	10	9	1

În tabelul 6.2, pentru scrutinul inițial este aplicat divizorul 49,5, iar pentru cel de-al doilea scrutin – divizorul 49,7. De asemenea, sunt folosite notările: $g_i = \lfloor V_i/49{,}5 \rfloor$ şi $g_i^{'} = \lfloor V_i/49{,}7 \rfloor$. Valoarea x_i se obține prin rotunjirea până la întregi a rezultatului raportului $V_i/49{,}5$ prin adaos, dacă $V_i/49{,}5 \ge \sqrt{g_i(g_i+1)}$, şi – prin lipsă, dacă $V_i/49{,}5 < \sqrt{g_i(g_i+1)}$. În mod similar, se determină şi valoarea $x_i^{'}$. Din tabel, se poate observa că deşi preferințele decidenților pentru partidul 1 sunt aceleaşi în ambele scrutine ($V_1 = V_1^{'} = 521$), numărul de mandate ce-i revin acestuia, conform rezultatelor celui de-al doilea scrutin ($x_1^{'} = 10$), este mai mic decât în primul scrutin ($x_1 = 11$), confirmând non-monotonia metodei Huntington-Hill față de preferințele decidenților partidului 1.

Afirmația 6.3. Metoda Hamilton poate să nu fie monotonă față de preferințele decidenților.

Într-adevăr, fie aceleaşi două scrutine ca şi la afirmația 6.1. Să examinăm cazul $x_i > a_i$, $x_k = a_k$ şi $x_j^{'} = x_j = a_j$. Atunci, ținând cont de consecința 2.5, pentru ca metoda Hamilton să nu fie monotonă față de preferințele decidenților partidului *i*, adică să aibă, de exemplu, loc $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile $\Delta V_k < \Delta V_i = \Delta V_i^{'} < \Delta V_k + v_k$, ceea ce, după cum se poate uşor observa, poate fi. Aici $\Delta V_z = V_z - Qa_z$, $\Delta V_z^{'} = V_z^{'} - Q a_z^{'}$. ■

Exemplul 6.3. Fie cazul exemplului 6.1, cu excepția mărimii *c*, care aici nu se foloseşte. Atunci, ca şi în exemplul 6.1, avem $Q = Q' = 50$. Rezultatele celorlalte calcule, cu aplicarea metodei Hamilton, sunt prezentate în tabelul 6.3.

Tabelul 6.3

Calcularea valorilor x_i, $x_i^{'}$, i = 1, 2, 3 pentru exemplul 6.3

Parametrul	Partidul 1	Partidul 2	Partidul 3
V_i	521	419	60
a_i	10	8	1
ΔV_i	21	19	10
Δx_i	1	0	0
x_i	11	8	1

Parametrul	Partidul 1	Partidul 2	Partidul 3
$V_i^{'}$	521	423	56
$a_i^{'}$	10	8	1
$\Delta V_i^{'}$	21	23	6
$\Delta x_i^{'}$	0	1	0
$x_i^{'}$	10	9	1

În tabelul 6.3, pentru fiecare din cele $\Delta M = M - a_1 - a_2 - a_3$ partide cu valori mai mari ale mărimilor ΔV_i, valoarea Δx_i este stabilită egală cu 1, iar pentru celelalte partide – egală cu 0. În acelaşi mod, sunt calculate şi valorile mărimilor $\Delta x_i^{'}$, i = 1, 2, 3. De asemenea, $x_i = a_i + \Delta x_i$ şi $x_i^{'} = a_i^{'} + \Delta x_i^{'}$. Ca şi în exemplele 6.1 şi 6.2, datele tabelului 6.3 confirmă non-monotonia metodei Hamilton față de preferințele decidenților partidului 1.

7. Monotonia față de comasarea de partide

Să cercetăm cazul comasării de partide cu redistribuirea respectivă a electoratului, la păstrarea valorilor parametrilor M şi V, adică $M' = M$, $V' = V$ şi, de asemenea, a parametrilor ce țin de celelalte partide. Cazul poate reprezenta, de exemplu, formarea de blocuri electorale sau comasarea de zone geografice.

Afirmația 7.1. Metoda Divizor liniar general nu este monotonă față de comasarea de partide.

Fie se formează un bloc electoral din partidele $n - 1$ şi n, ceilalți parametri rămânând fără schimbare: $n' = n - 1$; $c \geq 1$; $V_i^{'} = V_i$, i = 1, 2, …, $n - 2$; $V_{n-1}^{'} = V_{n-1} + V_n$. Să examinăm unele din situațiile posibile. Dacă $V_{n-1} = a_{n-1}Q$ şi $V_n = a_nQ$, atunci, la $c \geq 1$, conform algoritmului DLG [6] au loc şi egalitățile: $V_{n-1}^{'} = a_{n-1}^{'}Q$, $x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = a_n$; $x_{n-1}^{'} = x_{n-1} + x_n = a_{n-1} + a_n = a_{n-1}^{'}$. Astfel, în baza $M' = M$, $V' = V$ şi $V_i^{'} = V_i$ (i = 1, 2, …, $n - 2$), au loc relațiile $x_i^{'} = x_i$, i = 1, 2, …, $n - 2$, îndeplinindu-se, conform consecinței 2.6, cerința de monotonie.

Dacă însă $V_{n-1} > a_{n-1}Q$, $V_n > a_nQ$, $x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = a_n$, $x_i > a_i$ şi $a_{n-1}^{'} = a_{n-1} + a_n$, atunci condiția de monotonie pentru partidul i nu se îndeplineşte, dacă au loc relațiile

$$\frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} > \frac{V_{n-1}}{cx_{n-1} + 1}, \quad \frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} > \frac{V_n}{cx_n + 1} \text{ şi } \frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} < \frac{V_{n-1} + V_n}{c(x_{n-1} + x_n) + 1}, \tag{7.1}$$

care ar conduce la aceea că cel puțin un mandat de la partidul i ar trece la partidul $(n - 1)'$. În condițiile menționate, inegalitățile (7.1), după cum se poate uşor observa, pot avea loc. Într-adevăr, fie $V_{n-1}/(cx_{n-1} + 1) < V_n/(cx_n + 1)$. Atunci, pentru ca să poată avea loc (7.1), poate fi suficient să aibă loc $V_n/(cx_n + 1) < (V_{n-1} + V_n)/[c(x_{n-1} + x_n) + 1)]$, adică $V_n(cx_n + 1) + cx_{n-1}V_n < V_{n-1}(cx_n + 1) + V_n(cx_n + 1)$ sau $cx_{n-1}V_n < V_{n-1}(cx_n + 1)$, de unde $V_n/(cx_n + 1) < V_{n-1}/cx_{n-1}$. Deci, dacă au loc inegalitățile $V_{n-1}/(cx_{n-1} + 1) < V_n/(cx_n + 1) < V_{n-1}/cx_{n-1}$, atunci, pot avea loc şi (7.1). Astfel, metoda DLG poate să nu fie monotonă pentru partidul i. În mod similar, veridicitatea afirmației 7.1 poate fi demonstrată şi pentru blocuri din trei sau mai multe partide.▼

Consecința 7.1. Metodele d'Hondt, Sainte-Laguė şi Mixtă pot să nu fie monotone față de numărul de partide.

Justețea consecinței 7.1, pentru metodele d'Hondt şi Sainte-Laguė, rezultă din faptul că acestea sunt cazuri particulare ale metodei DLG [6]. În ce priveşte metoda Mixtă, conform [4] la $\Delta x_i \leq 1$, $i=\overline{1,n}$, valorile x_i, $i=\overline{1,n}$, obținute la aplicarea metodelor Sainte-Laguė şi Mixtă, coincid. Totodată, metoda Sainte-Laguė poate să nu fie monotonă față de numărul de partide şi în condițiile că $\Delta x_i \leq 1$, $i=\overline{1,n}$ (asemenea condiții nu au fost înaintate la demonstrarea afirmației 7.1). Deci, metoda Mixtă poate, de asemenea, să nu fie monotonă față de numărul de partide. ■

Afirmația 7.2. Metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă față de comasarea de partide.

Într-adevăr, fie se formează un bloc electoral din partidele $n - 1$ şi n, ceilalți parametri rămânând fără schimbare: $n' = n - 1$; $V_i' = V_i$, i = 1, 2, …, n – 2; $V_{n-1}' = V_{n-1} + V_n$. Din condițiile problemei, au loc relațiile

$$\sqrt{(x_i-1)x_i} \leq \frac{V_i}{G} < \sqrt{x_i(x_i+1)}\,;\ \sqrt{(x_{n-1}-1)x_{n-1}} \leq \frac{V_{n-1}}{G} < \sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+1)}\,;$$
$$\sqrt{(x_n-1)x_n} \leq \frac{V_n}{G} < \sqrt{x_n(x_n+1)}\,. \tag{7.2}$$

Pentru ca metoda Huntington-Hill să nu fie monotonă pentru partidul i, adică, conform consecinței 2.6, să aibă loc $x_i' < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile

$$\frac{V_i}{G'} < \sqrt{(x_i-1)x_i}\,;\ \sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)} \leq \frac{V_{n-1}'}{G'}\,, \tag{7.3}$$

care ar conduce la trecerea, de la partidul i la cel $n' = n - 1$, a cel puțin unui mandat ($x_{n-1}' \geq x_{n-1} + x_n + 1$). Din multiplele variante, care satisfac condițiile (7.2) şi (7.3), vom cerceta situația pentru care $x_{n-1}' = x_{n-1} + x_n + 1$ şi

$$\sqrt{(x_i-1)x_i} = \frac{V_i}{G}\,;\ \frac{V_{n-1}}{G} = \alpha\sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+1)}\ \ \frac{V_n}{G} = \alpha\sqrt{x_n(x_n+1)}\,;$$
$$\frac{V_i}{G'} = \alpha\sqrt{(x_i-1)x_i}\,;\ \sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)} = \frac{V_{n-1}'}{G'}\,, \tag{7.4}$$

unde $\alpha \approx 1$, $\alpha > 1$. Din (7.4) obținem: $G = V_i/\sqrt{(x_i-1)x_i}$, $V_{n-1} = \alpha V_i\sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+1)}/\sqrt{(x_i-1)x_i}$, $V_n = \alpha V_i\sqrt{x_n(x_n+1)}/\sqrt{(x_i-1)x_i}$, $G' = V_i/\alpha\sqrt{(x_i-1)x_i}$, $V_{n-1}' = G'\sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)}$. Ultima egalitate poate fi reprezentată în forma $\Delta V_{n-1} + \Delta V_n = V_i\sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)}/\alpha\sqrt{(x_i-1)x_i}$ sau $\alpha V_i[\sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+1)} + \sqrt{x_n(x_n+1)}]/\sqrt{(x_i-1)x_i} = V_i\sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)}/\alpha\sqrt{(x_i-1)x_i}$, de unde $\alpha^2[\sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+1)} + \sqrt{x_n(x_n+1)}] = \sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)}$, adică $\sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+1)} + + \sqrt{x_n(x_n+1)} > \sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_n+1)}$, care, în urma unor transformări simple, se reduce la condiția $\sqrt{x_{n-1}x_n(x_{n-1}+1)(x_n+1)} > x_{n-1}x_n$. Deoarece $x_{n-1} > 0$ şi $x_n > 0$, condiția în cauză are loc. Deci, metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă pentru partidul i. În mod similar, veridicitatea afirmației 7.2 poate fi demonstrată şi pentru blocuri din trei sau mai multe partide. ■

Afirmația 7.3. Metoda Hamilton poate să nu fie monotonă față de comasarea de partide.

Într-adevăr, fie se formează un bloc electoral din partidele $n - 1$ şi n, ceilalți parametri rămânând fără schimbare: $n' = n - 1$; $V_i' = V_i$, i = 1, 2, …, n – 2; $V_{n-1}' = V_{n-1} + V_n$. Atunci, au loc relațiile $\Delta V_i = \Delta V_i'$, i = 1, 2, …, n – 2, unde $\Delta V_i = V_i - Qa_i$, $\Delta V_i' = V_i' - Qa_i'$. Să examinăm cazul: $V_{n-1} > a_{n-1}Q$, $V_n > a_nQ$, $x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = a_n$, $x_i > a_i$ şi $a_{n-1}' = a_{n-1} + a_n$. Pentru acesta, au loc relațiile: $\Delta V_{n-1} < \Delta V_i$, $\Delta V_n < \Delta V_i$, $\Delta V_{n-1}' = \Delta V_{n-1} + \Delta V_n$, iar ca metoda Hamilton să nu fie monotonă pentru partidul *i*, adică, conform consecinței 2.6, să aibă loc $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile $\Delta V_i^{'} < \Delta V_{n-1}^{'}$, ceea ce, după cum se poate uşor observa, poate fi. ■

8. Monotonia față de divizarea de partide

Să cercetăm cazul divizării de partide cu redistribuirea respectivă a electoratului, la păstrarea valorilor parametrilor *M* şi *V*, adică *M'* = *M*, *V'* = *V* și, de asemenea, a valorilor parametrilor ce țin de celelalte partide. Caracterul divizării de partide este diferit de cel al comasării de partide, în sensul că non-monotonia apare în alte condiții, parametrul *n* fiind unul dependent. De aceea, nu este aplicabilă afirmația 2.1. Cazul poate reprezenta, de exemplu, desprinderea unor noi partide de la partidele existente sau separarea unor zone geografice de la zonele existente.

Afirmația 8.1. Metoda Divizor liniar general nu este monotonă față de divizarea de partide.

Într-adevăr, fie de la partidul *k* se desprinde un nou partid – cel *n* + 1, cu distribuirea acestea a voturilor, obținute de partidul *k*, în primul scrutin, ceilalți parametri rămânând neschimbați: $n' = n + 1$; $c \geq 1$; $V_i^{'} = V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n \backslash k$; $V_{n+1} = 0$; $V_k^{'} = V_k - V_{n+1}^{'}$.

Cerința de monotonie, conform consecinței 2.6, nu s-ar respecta, doar dacă cel puțin pentru un partid *i* ($i \neq k$, $i \neq n+1$) ar avea loc $x_i^{'} < x_i$, adică, dacă ar avea loc relațiile $x_k^{'}$ + $x_{n+1}^{'} > x_k$. Să cercetăm un caz simplu: $V_{n+1}^{'} = a_{n+1}^{'}Q$ (partidul *n* +1 nu are nicio rezervă de voturi pentru a mai prelua vreun mandat, în afară de cele $a_{n+1}^{'}$), $V_k^{'} > a_k^{'}Q$ (partidul *k* poate avea şanse de a prelua cel puțin un mandat de la alte partide), $x_k = a_k = a_k^{'} + a_{n+1}^{'}$, $x_k^{'} = a_k^{'} + 1$. Pentru acesta trebuie să aibă loc relațiile

$$\frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} > \frac{V_k}{cx_k + 1} \text{ şi } \frac{V_i}{c(x_i - 1) + 1} < \frac{V_k^{'}}{c(x_k^{'} - 1) + 1}. \tag{8.1}$$

În acest scop, este suficient de demonstrat că are loc inegalitatea $\frac{V_k}{cx_k + 1} < \frac{V_k^{'}}{c(x_k^{'} - 1) + 1}$. Avem $\frac{V_k}{cx_k + 1} = \frac{V_k^{'} + a_{n+1}^{'}Q}{c(a_k^{'} + a_{n+1}^{'}) + 1}$ și $\frac{V_k^{'}}{c(x_k^{'} - 1) + 1} = \frac{V_k^{'}}{ca_k^{'} + 1}$. Astfel, trebuie să aibă loc $\frac{V_k^{'} + a_{n+1}^{'}Q}{c(a_k^{'} + a_{n+1}^{'}) + 1} < \frac{V_k^{'}}{ca_k^{'} + 1}$, adică $V_n^{'}(ca_n^{'} + 1) + ca_n^{'}a_{n+1}^{'}Q + a_{n+1}^{'}Q < V_n^{'}(ca_n^{'} + 1) + V_n^{'}ca_{n+1}^{'}$ sau $ca_k^{'}a_{n+1}^{'}Q + a_{n+1}^{'}Q < V_k^{'}ca_{n+1}^{'} = (a_k^{'}Q + \Delta V_k^{'})ca_{n+1}^{'} = ca_k^{'}a_{n+1}^{'}Q + \Delta V_k^{'}ca_{n+1}^{'}$, de unde $\Delta V_k^{'}a_{n+1}^{'} > Q$, care la $a_{n+1}^{'} > 1$ poate avea loc. Deci, inegalitățile (8.1) pot avea loc, iar metoda DLG poate să nu fie monotonă pentru partidul *i*. În mod similar, veridicitatea afirmației 8.1 poate fi demonstrată și pentru divizarea în trei sau mai multe partide. ■

Consecința 8.1. Metodele d'Hondt, Sainte-Laguė şi Mixtă pot să nu fie monotone față de numărul de partide.

Justețea consecinței 8.1 are la bază aceleaşi argumente ca şi cele de la consecința 7.1. ■

Afirmația 8.2. Metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă față de divizarea de partide.

Într-adevăr, fie de la partidul *k* se desprinde un nou partid – cel *n* + 1, cu distribuirea între acestea a voturilor, obținute de partidul *k* în primul scrutin, ceilalți parametri rămânând fără schimbare: $n' = n + 1$; $V_i^{'} = V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n \backslash k$; $V_{n+1} = 0$; $V_k^{'} = V_k - V_{n+1}^{'}$. Din condițiile problemei, au loc relațiile

$$\sqrt{(x_i - 1)x_i} \leq \frac{V_i}{G} < \sqrt{x_i(x_i + 1)};\ \sqrt{(x_k - 1)x_k} \leq \frac{V_k}{G} < \sqrt{x_k(x_k + 1)}. \tag{8.2}$$

Pentru ca metoda Huntington-Hill să nu fie monotonă pentru partidul i, adică, conform consecinței 2.6, să aibă loc $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile

$$\frac{V_i}{G'} < \alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}\ ;\ \sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}} \le \frac{V_k^{'}}{G'}\ ;\ \sqrt{(x_k - x_k^{'})(x_k - x_k^{'} + 1)} \le \frac{V_{n+1}^{'}}{G'}, \tag{8.3}$$

care ar conduce la trecerea, de la partidul i la cel k, a cel puțin unui mandat ($x_k^{'} + x_{n+1}^{'} \ge x_k + 1$). Din multiplele variante care satisfac condițiile (8.2) şi (8.3), vom cerceta situația pentru care $x_k^{'} + x_{n+1}^{'} = x_k + 1$ şi

$$\sqrt{(x_i - 1)x_i} = \frac{V_i}{G};\ \frac{V_k}{G} = \alpha\sqrt{x_k(x_k + 1)}\ ;$$
$$\frac{V_i}{G'} = \alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}\ ;\ \sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}} = \frac{V_k^{'}}{G'};\ \sqrt{(x_{n+1}^{'} - 1)x_{n+1}^{'}} = \frac{V_{n+1}^{'}}{G'}, \tag{8.4}$$

unde $\alpha \approx 1$, $\alpha > 1$ şi $x_{n+1}^{'} = x_k - x_k^{'} + 1$. Din (8.4) obținem: $G = V_i/\sqrt{(x_i - 1)x_i}$, $V_k = \alpha V_i\sqrt{x_k(x_k + 1)}/\sqrt{(x_i - 1)x_i}$, $G' = V_i/\alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}$, $V_k^{'} = V_i\sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}}/\alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}$, $V_{n+1}^{'} = V_i\sqrt{(x_{n+1}^{'} - 1)x_{n+1}^{'}}/\alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}$. Adunând parte cu parte ultimele două inegalități şi înlocuind, obținem $V_k = V_i[\sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}} + \sqrt{(x_{n+1}^{'} - 1)x_{n+1}^{'}}]/\alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}$ sau $\alpha V_i\sqrt{x_k(x_k + 1)}/\sqrt{(x_i - 1)x_i} = V_i[\sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}} + \sqrt{(x_{n+1}^{'} - 1)x_{n+1}^{'}}]/\alpha\sqrt{(x_i - 1)x_i}$, de unde $\alpha^2\sqrt{(x_k^{'} + x_{n+1}^{'} - 1)(x_k^{'} + x_{n+1}^{'})} = \sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}} + \sqrt{(x_{n+1}^{'} - 1)x_{n+1}^{'}}$, adică $\sqrt{(x_k^{'} + x_{n+1}^{'} - 1)(x_k^{'} + x_{n+1}^{'})} > \sqrt{(x_k^{'} - 1)x_k^{'}} + \sqrt{(x_{n+1}^{'} - 1)x_{n+1}^{'}}$, care, în urma unor transformări simple, se reduce la condiția $x_k^{'}x_{n+1}^{'} > \sqrt{x_k^{'}x_{n+1}^{'}(x_k^{'} - 1)(x_{n+1}^{'} - 1)}$. Deoarece $x_k^{'} > 0$ şi $x_{n+1}^{'} > 0$, condiția în cauză are loc. Deci, metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă pentru partidul i. În mod similar, veridicitatea afirmației 8.2 poate fi demonstrată şi pentru divizarea în trei sau mai multe partide. ■

Afirmația 8.3. Metoda Hamilton poate să nu fie monotonă față de divizarea de partide.

Într-adevăr, fie de la partidul k se desprinde un nou partid – cel $n + 1$, cu distribuirea între acestea a voturilor, obținute de partidul k în primul scrutin, ceilalți parametri rămânând neschimbați: $n' = n + 1$; $V_i^{'} = V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n \backslash k$; $V_{n+1} = 0$; $V_k^{'} = V_k - V_{n+1}^{'}$. Atunci, au loc relațiile $\Delta V_i^{'} = \Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 2$, unde $\Delta V_i = V_i - Qa_i$, $\Delta V_i^{'} = V_i^{'} - Qa_i^{'}$. Să examinăm cazul: $x_i > a_i$, $V_k > a_kQ$, $x_k = a_k$, $V_k^{'} > a_k^{'}Q$, $V_{n+1}^{'} < a_{n+1}^{'}Q$. Pentru acesta, are loc inegalitatea $\Delta V_k < \Delta V_i$, iar ca metoda Hamilton să nu fie monotonă pentru partidul i, deci, conform consecinței 2.6, să aibă loc $x_i^{'} < x_i$, adică $x_k^{'} + x_{n+1}^{'} \ge x_k + 1$, este suficient să aibă loc inegalitățile

$$\Delta V_i < \Delta V_k^{'},\ \Delta V_i < \Delta V_{n+1}^{'}. \tag{8.5}$$

Din condițiile problemei, avem $\Delta V_k^{'} = \Delta V_k + (Q - \Delta V_{n+1}^{'})$, de unde $\Delta V_k^{'} + \Delta V_{n+1}^{'} = Q + \Delta V_k$. Să considerăm cazul $\Delta V_k^{'} = \Delta V_{n+1}^{'}$. Atunci $\Delta V_k^{'} = \Delta V_{n+1}^{'} = (Q + \Delta V_k)/2$ şi condițiile de non-monotonie (8.5) se reduc la $\Delta V_i < (Q + \Delta V_k)/2$, ceea ce, evident, poate fi. Deci, metoda Hamilton poate să nu fie monotonă pentru partidul i. În mod similar, veridicitatea afirmației 8.3 poate fi demonstrată şi pentru divizarea în trei sau mai multe partide. ■

9. Monotonia față de aria de cuprindere

Monotonia față de aria de cuprindere este un caz aparte, ce se caracterizează prin creşterea sau descreşterea atât a numărului de partide n, cât şi a numărului de voturi $V = V(n)$ şi a numărului total de mandate $M = M(n)$, fiecăruia din noile partide revenindu-i un număr de mandate proporțional cu numărul de voturi acumulate. Aici şi în continuare, notarea $Z(Y)$ semnifică monotonia metodei VD față de modificarea valorii parametrului Y – modificare care implică, totodată, şi modificarea respectivă a valorii parametrului Z. Cazul poate reprezenta, de exemplu, cooptarea de noi state într-o comunitate sau ieşirea unor state dintr-o comunitate.

Afirmația 9.1. Monotonia metodelor VD față de modificarea ariei de cuprindere se reduce la imunitatea acestora față de paradoxul Noului stat.

Într-adevăr [3, 5], în cazul paradoxului Noului stat, se compară două votări consecutive ce se deosebesc doar prin creşterea numărului total de partide de la n la $n' = n + 1$, a numărului total de voturi de la V la $V' = V + V'_{n+1}$ şi, respectiv, a numărului total de mandate de la M la $M' = M + x'_{n+1}$, unde $x'_{n+1} > 0$ se determină în urma aplicării metodei VD folosite la determinarea x_i, $i = \overline{1,n}$, ținând cont de valorile mărimilor M şi V_i, $i = \overline{1,n}$. Paradoxul Noului stat nu are loc, dacă la $V'_i = V_i$, $i = \overline{1,n}$, $V_{n+1} = 0$, $V'_{n+1} > 0$ şi $M' = M + x'_{n+1}$, au loc relațiile $x'_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Totodată, ținând cont de consecința 2.1, odată cu imunitatea față de paradoxul Noului stat, metoda VD respectivă este monotonă şi față de descreşterea M. De asemenea, ținând cont de consecința 2.2, odată cu imunitatea față de paradoxul Noului stat, metoda VD respectivă este monotonă şi față de cazul general de creştere sau descreştere a parametrilor n, $V(n)$ şi $M(n)$. ■

Consecința 9.1. Metodele VD d'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill și Divizor liniar general sunt monotone față de modificarea ariei de cuprindere, iar metoda Hamilton poate să nu fie monotonă nici la $n = 2$.

Într-adevăr, metodele VD d'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill și Divizor liniar general sunt imune față de paradoxul Noului stat [3, 5, 6]. Deci, în baza afirmației 9.1, ele sunt monotone şi față de modificarea ariei de cuprindere totale. Totodată, conform [5], metoda Hamilton, în caz general, nu este imună la paradoxul Noului stat nici la $n = 2$. ■

10. Monotonia față de modificarea complexă a valorilor parametrilor de intrare

10.1. Monotonia față de unul sau mai mulți parametri de intrare

În practică, se întâlnesc şi multe situații de modificare complexă, de la scrutin la scrutin, a valorilor parametrilor de intrare. Complexă poate fi modificarea numărului de partide în anumite condiții. Modificarea n implică, în mod obligatoriu, şi modificarea valorilor altor parametri de intrare, fiind posibile şi cazuri cu două sau mai multe alternative. De exemplu, odată cu creşterea sau descreşterea numărului de partide se pot modifica şi preferințele electoratului, existând o multitudine de alternative posibile.

Astfel, cazul neparticipării unui partid în alegeri poate fi obținut prin două modificări elementare:

1) reducerea cu unul a numărului de partide prin comasarea a două partide;
2) redistribuirea preferințelor decidenților, conform s. 6.

La fel, cazul participării unui nou partid în alegeri poate fi obținut prin două modificări elementare:

1) creşterea cu o unitate a numărului de partide prin divizarea a două partide;
2) redistribuirea preferințelor decidenților, conform situației s. 6.

În baza consecinței 2.3 şi a afirmațiilor 2.1 şi 2.2, monotonia metodelor VD față de modificarea complexă a valorilor parametrilor de intrare poate fi determinată în baza monotoniei acestora față de modificările elementare ale valorilor parametrilor de intrare (a se vedea tabelul 10.1). Orice îmbinare de doi sau mai mulți parametri cu aceeaşi caracteristică de monotonie păstrează, conform afirmației 2.1, proprietatea de monotonie a acestora şi pentru ansamblul de parametri. Dacă, însă, se îmbină parametri cu caracteristică de monotonie diferită (pentru unii – „da", iar pentru alții – „nu"), atunci caracteristica de monotonie față de ansamblul de parametri, conform afirmației 2.4, este, dacă nu se demonstrează contrariul, „nu" – metoda respectivă nu este monotonă.

Tabelul 10.1

Monotonia unor metode VD față de un parametru/categorie de parametri

Parametrul	**Metoda VD**				
	Hamilton	**D'Hondt**	**Sainte-Laguė**	**Huntington-Hill**	**DLG**
la modificări elementare ale valorilor parametrilor de intrare					
M	la $n = 2$	da	da	da	da
V	da, invar.	da, invar.	da, invar.	da, invar.	da, invar.
V_k, $V(V_k)$	la $n = 2$	da	da	da	da
V_k, $k \in K$	nu	nu	nu	nu	nu
Comasare partide	nu	nu	nu	nu	nu
Divizare partide	nu	nu	nu	nu	nu
n, $M(n)$, $V(n)$	nu	da	da	da	da
la modificări complexe ale valorilor parametrilor de intrare					
n	nu	nu	nu	nu	nu

Din tabelul 10.1, se poate observa că toate metodele VD cercetate sunt invariante față de numărul total de voturi (V). De asemenea, toate metodele cu divizor (d'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill şi DLG) au aceleaşi caracteristici de monotonie față de un singur parametru/categorie de parametri de intrare, fiind monotone față de numărul total de mandate (M), numărul de voturi acumulate de un partid (V_k, $V(V_k)$) şi aria de cuprindere (n, $M(n)$, $V(n)$) şi non-monotone față de preferințele decidenților (V_k, $k \in K$) şi numărul de partide (n). În acelaşi timp, metoda Hamilton, pe lângă faptul că este invariantă față de numărul total de voturi (V), este monotonă doar la $n = 2$ față numărul total de mandate (M) şi numărul de voturi acumulate de un partid (V_k, $V(V_k)$); în celelalte cazuri ea este non-monotonă.

Afirmația 10.1. Metodele cu divizor D'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill şi DLG sunt monotone față de orice îmbinare de parametrii M, V, $\{V_k, V(V_k)\}$ şi $\{n, M(n), V(n)\}$, dar, în caz general, nu sunt monotone față de îmbinarea unuia sau a ambilor parametri/categorii de parametri $\{V_k, k \in K\}$ şi n cu unul sau mai mulți din parametrii M, V, $\{V_k, V(V_k)\}$ şi $\{n, M(n), V(n)\}$.

Veridicitatea afirmației 10.1 rezultă direct din informațiile tabelului 10.1, consecința 2.3 şi afirmațiile 2.1 şi 2.2. ■

Afirmația 10.2. Situația de monotonie față de preferințele decidenților (a se vedea s. 6) poate fi obținută şi prin aplicarea multiplă a modificărilor elementare de comasare şi cele de divizare de partide.

Într-adevăr, prin mai multe comasări şi divizări de partide, ca la demonstrarea afirmației 7.1, se poate obține orice configurație de partide finală. Deci, se poate obține şi o configurație finală cu acelaşi număr de partide, ca şi la cea inițială ($n_{\text{inițial}} = n_{\text{final}}$), dar care s-ar deosebi de cea inițială prin preferințele V_i, $i = \overline{1,n}$ ale decidenților. ■

Consecința 10.1. Metodele VD d'Hondt, Sainte-Laguė, Huntington-Hill şi Hamilton pot să nu fie monotone față de preferințele decidenților.

Justețea consecinței 10.2 rezultă direct din afirmațiile 10.2, 7.1-7.3, 8.1-8.3 şi consecințele 7.1, 7.2, acestea înlocuind demonstrările din s. 6. ■

10.2. Monotonia față de numărul de partide

În confirmarea justeței afirmațiilor 2.1, 2.2 şi a consecinței, 2.3, în secțiune, se examinează aparte situația de monotonie față de numărul de partide. Numărul de partide se poate modifica, după cum a fost deja menționat, prin comasarea de partide, prin divizarea de partide, dar şi prin participarea în alegeri a unor noi partide cu noi programe de activitate sau, din contra, neparticiparea în alegeri a unor partide, care ar conduce la redistribuirea electoratului. Conform tabelului 10.1, toate metodele VD cercetate pot fi non+monotone față de numărul de partide.

Afirmația 10.3. Metoda DLG poate să nu fie monotonă față de numărul de partide.

Într-adevăr, fie: $n' = n + 1$; $c \geq 1$; $V_i^{'} = V_i$, $i = 1, \ldots, n \backslash (j, k, l)$; $V_k < V_k^{'} = V_k + v_k$, $V_j > V_j^{'} = V_j - v_j$, $v_k = v_j$, $x_k = a_k$, $x_j^{'} = x_j = a_j$; $V_l = V_l^{'} + V_{n+1}^{'} = a_l Q = x_l Q$, $V_{n+1} = 0$, $V_l^{'} = a_l^{'} Q$, $V_{n+1}^{'} = a_{n+1}^{'} Q$. Aici, v_k reprezintă creşterea valorii mărimii V_k în al doilea scrutin față de primul din contul reducerii cu aceeaşi valoare a mărimii V_j. De asemenea, de la partidul l, se desprinde un nou partid – cel $n + 1$, cu distribuirea între acestea a voturilor, obținute de partidul l în primul scrutin.

Conform metodei DLG [6], în baza egalităților $V_l^{'} = a_l^{'} Q$ şi $V_{n+1}^{'} = a_{n+1}^{'} Q$, au loc relațiile $x_l^{'} = a_l^{'}$, $x_{n+1}^{'} = a_{n+1}^{'}$; deci $x_l^{'} + x_{n+1}^{'} = x_l$. Atunci, conform consecinței 2.6, pentru ca, la $x_i > a_i$, metoda DLG să nu fie monotonă pentru partidul i, adică să aibă loc, de exemplu, $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile (6.1), care ar conduce la trecerea, de la partidul i la cel k, a cel puțin unui mandat. În condițiile menționate, inegalitățile (6.1), după cum se poate uşor observa, pot avea loc. Deci, metoda DLG poate să nu fie monotonă pentru partidul i. În mod similar, aceasta poate să nu fie monotonă şi pentru mai multe partide. Ținând cont de consecințele 2.1 şi 2.2, se poate conchide că metoda DLG poate să nu fie monotonă față de numărul de partide. ■

Exemplul 10.1. Fie cazul: $M = M' = 23$; $n = 4$; $n' = 5$; $V_1 = V_1^{'} = 521$; $V_2 = 419$; $V_3 = 60$; $V_4 = 150$; $V_2^{'} = 423$; $V_3^{'} = 56$; $V_4^{'} = 100$; $V_5^{'} = 50$; $c = 3$. Atunci, obținem $Q = (521 + 419 + 60 + 150)/23 = 50 = Q' = (521 + 423 + 56 + 100 + 50)/23$ şi alte rezultate prezentate în tabelul 10.2.

Tabelul 10.2

Calcularea valorilor x_i (i = 1, 2, 3, 4) şi $x_i^{'}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5) pentru exemplul 10.1

Parametrul	Partidul			
	1	2	3	4
V_i	521	419	60	150
a_i	10	8	1	3
F_i	16,81	16,76	15	15
Δx_i	1	0	0	0
x_i	11	8	1	3

Parametrul	Partidul				
	1	2	3	4	5
$V_i^{'}$	521	423	56	100	50
$a_i^{'}$	10	8	1	2	1
$F_i^{'}$	16,81	16,92	14	14,29	12,50
$\Delta x_i^{'}$	0	1	0	0	0
$x_i^{'}$	10	9	1	2	1

În tabelul 10.2, valorile mărimilor x_i, $x_i^{'}$ sunt calculate ca şi în exemplul 6.1. Din tabel, se poate observa că, deşi $V_1 = V_1^{'} = 521$, numărul de mandate ce-i revin partidului 1, conform rezultatelor celui de-al doilea scrutin ($x_1^{'} = 10$), este mai mic decât în primul scrutin ($x_1 = 11$), confirmând non-monotonia metodei DLG la $c = 3$ față de numărul de partide n.

Consecința 10.2. Metodele d'Hondt şi Sainte-Laguë pot să nu fie monotone față de numărul de partide.

Justețea consecinței 10.3 are la bază aceleaşi argumente ca şi cele de la consecința 7.1. ■

Afirmația 10.4. Metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă față de numărul de partide.

Într-adevăr, fie aceleaşi două scrutine, ca şi la afirmația 10.3, cu excepția valorii mărimii c, care aici nu se foloseşte. Atunci, conform consecinței 2.6, pentru ca la $x_i > a_i$ metoda Huntington-Hill să nu fie monotonă pentru partidul i, adică să aibă loc $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile (6.2), care ar conduce la trecerea, de la partidul i la cel k, a cel puțin unui mandat. Ținând cont de datele inițiale, inclusiv cele $V_i^{'} = V_i$ şi $V_k^{'} = V_k + v_k$, $v_k >$ 0, se poate uşor observa că condițiile (6.2) se pot îndeplini. Deci, metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă pentru partidul *i*. Evident, dacă metoda Huntington-Hill poate să nu fie monotonă pentru unul din cele *n* partide, atunci ea poate să nu fie monotonă şi pentru două sau mai multe partide. ■

Exemplul 10.2. Fie cazul exemplului 10.1, cu excepția mărimii *c*, care aici nu se foloseşte. Calculele, cu aplicarea metodei Huntington-Hill, ca şi pentru exemplul 6.2, sunt prezentate în tabelul 10.3.

Tabelul 10.3

Calcularea valorilor x_i (i = 1, 2, 3, 4) şi $x_i^{'}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5) pentru exemplul 10.2

Parametrul	Partidul			
	1	2	3	4
V_i	521	419	60	150
V_i/49,5	10,525	8,465	1,212	3,030
$\sqrt{a_i^*(a_i^*+1)}$	10,488	8,485	1,414	3,464
x_i	11	8	1	3

Parametrul	Partidul				
	1	2	3	4	5
$V_i^{'}$	521	423	56	100	50
$V_i^{'}$/49,7	10,483	8,511	1,127	2,012	1,006
$\sqrt{a_i^{*'}(a_i^{*'}+1)}$	10,488	8,485	1,414	2,449	1,414
$x_i^{'}$	10	9	1	2	1

Comparând datele tabelelor 10.2 şi 10.3, se poate observa că valorile x_i, $i = \overline{1,4}$ şi $x_i^{'}$, $i = \overline{1,5}$ pentru exemplul 10.3 coincid cu cele pentru exemplul 10.2, confirmând non-monotonia şi a metodei Huntington-Hill față de numărul de partide *n*.

Afirmația 10.5. Metoda Hamilton poate să nu fie monotonă față de numărul de partide.

Într-adevăr, fie aceleaşi două scrutine ca şi la afirmația 10.3. Să examinăm cazul de la afirmația 10.4. Atunci, pentru ca la $x_i > a_i$ metoda Hamilton să nu fie monotonă pentru partidul *i*, adică să aibă loc $x_i^{'} < x_i$, este suficient să aibă loc inegalitățile $\Delta V_k < \Delta V_i = \Delta V_i^{'} < \Delta V_k + v_k$, ceea ce, după cum se poate uşor observa, poate fi. Aici $\Delta V_z = V_z - Qa_z$, $\Delta V_z^{'} = V_z^{'} - Q a_z^{'}$. ■

Exemplul 10.3. Fie cazul exemplului 10.1, cu excepția mărimii *c*, care aici nu se foloseşte. Atunci, ca şi în exemplul 10.1, avem $Q = Q' = 50$. Rezultatele celorlalte calcule, cu aplicarea metodei Hamilton, sunt prezentate în tabelul 10.4.

Tabelul 10.4

Calcularea valorilor x_i (i = $i = \overline{1,4}$) şi $x_i^{'}$ ($i = \overline{1,5}$) pentru exemplul 10.3

Parametrul	Partidul			
	1	2	3	4
V_i	521	419	60	150
a_i	10	8	1	3
ΔV_i	21	19	10	0
Δx_i	1	0	0	0
x_i	11	8	1	3

Parametrul	Partidul				
	1	2	3	4	5
$V_i^{'}$	521	423	56	100	50
$a_i^{'}$	10	8	1	2	1
$\Delta V_i^{'}$	21	23	6	0	0
$\Delta x_i^{'}$	0	1	0	0	0
$x_i^{'}$	10	9	1	2	1

Comparând datele tabelelor 10.2 şi 10.4, se poate observa că valorile x_i, $i = \overline{1,4}$ şi $x_i^{'}$, $i = \overline{1,5}$ pentru exemplul 10.3 coincid cu cele pentru exemplul 10.1, confirmând non-monotonia şi a metodei Hamilton față de numărul de partide *n*.

11. Concluzii

Sunt cercetate aspectele de monotonie ale metodelor VD multiopționale cu divizor d'Hondt, Sainte-Laguë, Huntington-Hill şi DLG, față de modificarea valorilor parametrilor de intrare: M; n; V; V_i, $i=\overline{1,n}$. Este demonstrat că toate metodele cu divizor cercetate, dar şi metoda Hamilton, sunt invariante față de numărul total de voturi (V). De asemenea, toate metodele cu divizor cercetate au aceleaşi caracteristici de monotonie față de un singur parametru/categorie de parametri de intrare, fiind monotone față de numărul total de mandate (M), numărul de voturi acumulate de un partid (V_k, $V(V_k)$) şi aria de cuprindere (n, $M(n)$, $V(n)$), dar non-monotone față de preferințele decidenților (V_k, $k \in K$), comasarea de partide, divizarea de partide şi numărul de partide (n) în general. Sunt prezentate exemple care confirmă cazurile de non-monotonie identificate. Este propusă modalitatea de determinare a caracteristicii de monotonie a metodelor VD cu divizor față de orice combinare de parametri de intrare în baza monotoniei față de un parametru/categorie de parametri.

Rezultatele obținute pot fi utile la alegerea metodei VD pentru aplicații concrete.

Referințe bibliografice:

1. ROBINSON, F. *The Alabama Paradox.* Teaching Mathematics and its Applications. 1982, vol. 1, Issue 2, pp. 69-72.
2. TANNENBAUM P. *Excursions in Modern Mathematics*, Seventh Edition. Pearson, 2008, 704 p.
3. GALLAGHER, M. *Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems*. Electoral Studies (1991), 10:1, pp. 33-51.
4. BOLUN, I. *„Votes-decision" monotone method in PR systems*. Economica, nr.4(78)/2011. – Chişinău: Editura ASEM. pp. 108-117.
5. BOLUN, I. *Monotony of Some Multioptional „Votes-Decision" PR Methods*. Economica, nr.3(89), 2014. Chişinău: Editura ASEM. pp. 70-79.
6. BOLUN I. *Seats allocation in party-list election.* Economica, nr.2(76)/2011. - Chişinău: Editura ASEM. pp. 138-151.
7. GALLAGHER, M. and MITCHELL, P. *The Politics of Electoral Systems*. - London: Oxford University Press, 2008.
8. BOLUN, I. *Unele proprietăți ale metodelor „voturi-decizie" RP*. În: Competitivitatea şi inovarea în economia cunoaşterii, confer. şt. intern., 26-27 sept. 2014. Vol. III. - Chişinău: Editura ASEM, 2014. – p. 7-14. ISBN 978-9975-75-717-1.
9. BOLUN, I. *Formalizarea aspectelor de monotonie ale metodelor „voturi-decizie" multiopționale*. Economica, 2015, nr.2. Chişinău: Editura ASEM.