MONOTONIA UNOR METODE „VOTURI-DECIZIE" RP MULTIOPȚIONALE

Dr. hab. prof. univ. Ion BOLUN, ASEM

Sunt cercetate unele aspecte de monotonie ale metodelor Hamilton, Divizor liniar general şi Mixtă. Este demonstrat faptul că metoda Divizor liniar general este imună la paradoxurile Alabama, al Populației şi al Noului stat. De asemenea, la două partide (state), metodele Hamilton şi Mixtă sunt imune la paradoxurile Alabama şi cel al Populației; mai mult ca atât, metoda Mixtă este imună şi la paradoxul Noului stat.

1. Introducere

Luarea deciziilor colective multiopționale prin votare cu reprezentare proporțională (RP) este larg folosită în practică. Însă caracterul în întregi al problemei de optimizare respective conduce, de obicei, la soluții disproporționate. Minimizarea disproporționalității reprezentării voinței decidenților în opțiunea finală (decizie) prin votare RP se asigură de metoda Hamilton [1, 2]. Cu regret, această metodă, spre deosebire de aşa metode bine cunoscute ca cele d'Hondt [1], Sainte-Laguë [1] şi Huntington-Hill [3], nu garantează respectarea cerinței de monotonie față de creşterea sau descreşterea numărului de opțiuni sau al celui de decidenți (paradoxurile Alabama, al Populației şi al Noului stat [3, 4]). Acest neajuns a cauzat folosirea mai rară a metodei Hamilton. Însă aplicarea metodelor d'Hondt, Sainte-Laguë sau Huntington-Hill poate conduce la o disproporție semnificativ mai mare decât cea Hamilton, inclusiv cu încălcarea regulii Cotei [5].

În lucrare se cercetează unele aspecte de monotonie ale metodelor Hamilton, Divizor liniar general [6] şi Mixtă [7], în baza problemei de alegere a deputaților în Parlament pe liste de partid – unul din cele mai frecvente cazuri de luare a deciziilor colective multiopționale prin votare RP.

2. Considerații preliminare

Problema de alocare a mandatelor include mărimile [5]: numărul total M de mandate în organul electiv; numărul n de partide ce au depăşit pragul electoral; numărul total V de voturi acumulate de cele n partide; numărul total V_i de voturi acumulate de partidul $i, i=\overline{1,n}$; numărul de mandate x_i, alocate partidului i, $i=\overline{1,n}$; I – indicele de disproporționalitate. De asemenea, în diferite reguli VD se folosesc şi aşa mărimi ca: $Q = V/M$, u_i – numărul curent de mandate deja alocate partidului i ($u_i \geq 0$) şi $a_i = \lfloor V_i/Q \rfloor$ – cota de jos pentru partidul i.

Se va considera că mărimile V_i, $i = 1..n$ sunt ordonate în descreştere

$$V_1 > V_2 > V_3 > \ldots > V_n. \quad (2.1)$$

În diverse situații, este utilă formalizarea

MONOTONY OF SOME MULTIOPTIONAL „VOTES-DECISION" PR METHODS

Prof. Dr. Hab. Ion BOLUN, ASEM

Some monotony aspects of Hamilton, General Linear Divisor and Mixed „votes-decision" methods are investigated. It is proved that General Linear Divisor method is immune to Alabama, of Population and of New State paradoxes. At two parties (states), Hamilton and Mixed methods are immune to Alabama and of Population paradoxes; moreover, the Mixed method is immune to the New state paradox, too.

1. Introduction

Multioptional collective decision making by voting with proportional representation (PR) is widely used in practice. But the nature in integers of the respective optimization problem leads, usually, to disproportionate solutions. Minimal disproportionality of voters wills representation in the final option (decision) by PR voting is ensured by Hamilton method [1, 2]. Unfortunately, this method, unlike well-known methods such as the d'Hondt [1], Sainte-Laguë [1] and Huntington-Hill [3] ones, do not ensure monotony requirement when increasing or decreasing the number of options or of decision makers (the Alabama, of Population and of New State paradoxes [3, 4]).

This drawback has caused the rare further use of Hamilton method. But the d'Hondt, Sainte-Laguë and Huntington-Hill methods can lead to a significantly greater disparity than the Hamilton one, including the Quota rule violation [5].

Some monotony aspects of Hamilton, General Linear Divisor [6] and Mixed [7] methods are examined in this paper, basing on problem of election of Members of Parliament on party lists – one of the most common cases of collective multioptional decision-making by PR voting.

2. Preliminary considerations

The problem of allocation of seats includes parameters [5]: the total number M of seats in the elective body; the number n of parties that have exceeded the threshold; the total number V of votes cast for the n parties; the total number V_i of votes cast for party i, $i=\overline{1,n}$; the number x_i of seats allocated to party i, $i=\overline{1,n}$; I - index of disproportionality. Also, different „votes-decision" (VD) rules uses such parameters as: $Q = V/M$, u_i - the current number of seats already allocated to party i ($u_i \geq 0$) and $a_i = \lfloor V_i/Q \rfloor$ - the lower quota of party i.

It will be considered that values V_i, $i = 1..n$ are ordered in decreasing

$$V_1 > V_2 > V_3 > \ldots > V_n. \quad (2.1)$$

paradoxurilor Alabama, al Populației şi al Noului stat, definită în cele ce urmează.

Definiție 2.1. ***Paradoxul Alabama*** nu are loc, dacă la

$$V_i^{'} = V_i,\ i = 1..n \qquad (2.2)$$

$$M^{'} = M + g, \qquad (2.3)$$

unde g este un număr natural (întreg, mai mare ca zero), au loc relațiile

$$x_i^{'} \geq x_i,\ i = 1..n \qquad (2.4)$$

Afirmația 2.1. În problema (2.2)-(2.4) este suficient de demonstrat cazul g =1, adică

$$M^{'} = M + 1. \qquad (2.5)$$

Într-adevăr, dacă au loc relațiile {(2.2), (2.4), (2.5)}, atunci uşor se demonstrează şi cazul general (g > 1) al problemei (2.2)-(2.4), aplicând consecutiv: $M^{''} = M^{'} + 1$, $M^{'''} = M^{''} + 1$, etc. ■

Consecința 2.1. Problema (2.2)-(2.4) se reduce la cea {(2.2), (2.4), (2.5)}, care şi se va cerceta în cele ce urmează.

Definiție 2.2. ***Paradoxul Populației*** are loc, dacă la

$$V_i^{'} = V_i, i = 1,\ldots,n \backslash k \qquad (2.6)$$

$$V_k^{'} > V_k \qquad (2.7)$$

$$M^{'} = M \qquad (2.8)$$

are loc relația

$$x_k^{'} < x_k. \qquad (2.9)$$

Definiție 2.3. ***Paradoxul Noului stat*** nu are loc, dacă la (2.2) şi

$$V_{n+1} = 0,\ V_{n+1}^{'} > 0 \qquad (2.10)$$

$$M^{'} = M + x_{n+1}^{'}, \qquad (2.11)$$

au loc relațiile

$$x_i^{'} = x_i,\ i = 1..n, \qquad (2.12)$$

unde valoarea mărimii $x_{n+1}^{'}$ în (2.11) se determină în rezultatul aplicării metodei VD folosite la determinarea x_i, i = 1..n, ținând cont de valorile mărimilor M şi V_i, i = 1..n.

Este cunoscut, de asemenea, că metodele d'Hondt, Sainte-Laguë şi Huntington-Hill sunt imune la aceste trei paradoxuri [1].

Afirmația 2.2. Pentru problema {(2.2), (2.4), (2.5)}au loc relațiile

$$a_i \leq a_i^{'} \leq a_i + 1,\ i = 1..n. \qquad (2.13)$$

Într-adevăr, au loc

$$Q = V/M > Q' = V/(M + 1), \qquad (2.14)$$

deci au loc şi

$$a_i = \left\lfloor \frac{V_i}{Q} \right\rfloor \leq a_i^{'} = \left\lfloor \frac{V_i}{Q^{'}} \right\rfloor. \qquad (2.15)$$

A rămas de demonstrat că

$$a_i^{'} \leq a_i + 1,\ i = 1..n. \qquad (2.16)$$

Într-adevăr, relația (2.16) poate fi prezentată în

In various situations, it is useful to formalize the Alabama, of Population and of New State paradoxes, defined below.

Definition 2.1. The ***Alabama paradox*** do not occurs if

$$V_i^{'} = V_i,\ i = 1,\ldots,n \qquad (2.2)$$

$$M^{'} = M + g, \qquad (2.3)$$

where g is a natural number (integer, greater than zero), take place the relations

$$x_i^{'} \geq x_i,\ i = 1,\ldots,n \qquad (2.4)$$

Proposition 2.1. In problem (2.2)-(2.4) it is sufficient to prove only the case g =1, i.e.

$$M^{'} = M + 1. \qquad (2.5)$$

Indeed, if relations {(2.2), (2.4), (2.5)} occur, then it is easy to prove the general case (g > 1) of the problem (2.2)-(2.4), applying consecutively: $M'' = M' + 1$, $M''' = M'' + 1$, etc. ■

Consequence 2.1. Problem (2.2)-(2.4) reduces to the {(2,2), (2,4), (2,5)} one, which is examined below.

Definition 2.2. The ***paradox of Population*** occurs, if at

$$V_i^{'} = V_i, i = 1,\ldots,n \backslash k \qquad (2.6)$$

$$V_k^{'} > V_k \qquad (2.7)$$

$$M^{'} = M \qquad (2.8)$$

takes place the relation

$$x_k^{'} < x_k. \qquad (2.9)$$

Definition 2.3. The ***New State Paradox*** do not occurs, if at (2.2) and

$$V_{n+1} = 0,\ V_{n+1}^{'} > 0 \qquad (2.10)$$

$$M^{'} = M + x_{n+1}^{'}, \qquad (2.11)$$

take place the relations

$$x_i^{'} = x_i,\ i = 1,\ldots,n, \qquad (2.12)$$

where the value of $x_{n+1}^{'}$ in (2.11) is determined as a result of applying the VD method, used when determining x_i, i = 1,...,n, taking into account the values of M and V_i, i = 1,...,n.

It is known also that the d'Hondt, Sainte-Laguë and Huntington-Hill methods are immune to the three paradoxes in question [1].

Proposition 2.2. For problem {(2.2), (2.4), (2.5)} occur the relations

$$a_i \leq a_i^{'} \leq a_i + 1,\ i = 1..n. \qquad (2.13)$$

Indeed, we have

$$Q = V/M > Q' = V/(M + 1), \qquad (2.14)$$

so take place also

$$a_i = \left\lfloor \frac{V_i}{Q} \right\rfloor \leq a_i^{'} = \left\lfloor \frac{V_i}{Q^{'}} \right\rfloor. \qquad (2.15)$$

It remained to be proved that

$$a_i^{'} \leq a_i + 1,\ i = 1..n. \qquad (2.16)$$

Really, the relation (2.16) can be transformed to the forma

$$\left\lfloor \frac{V_i}{Q'} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{V_i}{Q} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{V_i}{Q'} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{V_i}{Q} + 1 \right\rfloor. \quad (2.17)$$

Totodată, din (2.14) avem

$$Q' = QM/(M + 1). \quad (2.18)$$

Astfel, ținând cont că $V = QM$, obținem

$$\left\lfloor \frac{V_i}{Q'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{V_i}{Q} \cdot \frac{M+1}{M} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{V_i}{Q} + \frac{V_i}{V} \right\rfloor. \quad (2.19)$$

Înlocuind (2.19) în (2.17), obținem

$$\left\lfloor \frac{V_i}{Q} + \frac{V_i}{V} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{V_i}{Q} + 1 \right\rfloor \quad (2.20)$$

Dar, deoarece $n \ge 2$ şi $V_i > 0$, $i = 1..n$, are loc $V_i/V < 1$. Astfel, inegalitatea (2.20) are loc, deci are loc şi (2.16). Îmbinând (2.15) şi (2.16), obținem (2.13). ■

3. Monotonia metodei Divizor liniar general

Prezintă interes monotonia metodei Divizor liniar general (DLG) propuse în [6].

Afirmația 3.1. Metoda Divizor liniar general este imună la paradoxurile Alabama, al Populației şi al Noului stat.

Într-adevăr, metoda DLG alocă următorul mandat partidului cu cea mai mare valoare a raportului $V_i/(cx_i + 1)$ – raport ce nu depinde de M, deci metoda este imună la paradoxul Alabama (vezi problema {(2.2), (2.4), (2.5)}).▼

Totodată, creşterea numărului de voturi doar pentru partidul k (vezi problema {(2.6), (2.8)-(2.10)} conduce la creşterea raportului $V_i/(cx_i + 1)$, pe când raporturile referitoare la celelalte partide rămân intacte, deci nu poate fi (2.9). Astfel, metoda DLG este imună la paradoxul Populației.▼

În ce priveşte paradoxul Noului stat, la aplicarea metodei DLG, valoarea mărimii x'_{n+1} se determină din condițiile evidente $V_i/[c(x_i + 1) + 1] < V'_{n+1}/(cx'_{n+1} + 1)$, $i = 1..n$ şi $V'_{n+1}/[c(x'_{n+1} + 1) + 1] < \max\{V_i/[c(x_i + 1) + 1], i = 1..n\}$. Aceasta nu afectează în vreun mod relațiile dintre raporturile $V_i/[c(x_i + 1) + 1]$, $i = 1..n$, deci se păstrează intacte valorile mărimilor x_i, $i = 1..n$. Astfel au loc (1.12) şi metoda DLG este imună la paradoxul Noului stat (vezi problema {(2.2), (2.10)-(2.12)}). ■

Consecința 3.1. Metodele d'Hondt şi Sainte-Lague sunt imune la paradoxurile Alabama, al Populației şi al Noului stat.

Într-adevăr, aceste metode sunt cazuri particulare ale metodei DLG: metoda d'Hondt – la $c = 1$, iar cea Sainte-Lague – la $c = 2$, metoda DLG fiind, conform afirmației 3.1 imună la paradoxurile în cauză. ■

4. Monotonia metodelor Hamilton şi Mixtă la *n* = 2

Metoda Hamilton este considerată nemonotonă [1]. Totuşi, la $n = 2$, după cum se va demonstra în

form

$$\left\lfloor \frac{V_i}{Q'} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{V_i}{Q} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{V_i}{Q'} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{V_i}{Q} + 1 \right\rfloor. \quad (2.17)$$

At the same time, from (2.14) we have

$$Q' = QM/(M + 1). \quad (2.18)$$

Thus, given that $V = QM$, we obtain

$$\left\lfloor \frac{V_i}{Q'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{V_i}{Q} \cdot \frac{M+1}{M} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{V_i}{Q} + \frac{V_i}{V} \right\rfloor. \quad (2.19)$$

Substituting (2.19) into (2.17), we obtain

$$\left\lfloor \frac{V_i}{Q} + \frac{V_i}{V} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{V_i}{Q} + 1 \right\rfloor \quad (2.20)$$

But, since $n \ge 2$ and $V_i > 0$, $i = 1,...,n$, occurs relation $V_i/V < 1$. Thus, inequality (2.20) takes place, therefore occurs (2.16), too. Combining (2.15) and (2.16), we obtain (2.13).■

3. Monotony of General Linear Divisor method

Of interest is the monotony of General Linear Divider method (GLD) proposed in [6].

Proposition 3.1. General Linear Divider method is immune to Alabama, of Population and of New State paradoxes.

Indeed, DLG method allocates the next seat to party with the highest value of the ratio $V_i/(cx_i + 1)$ – ratio that does not depend on M, so the method is immune to Alabama paradox (see problem {(2.2), (2.4), (2.5)}).▼

At the same time, increasing the number of votes only for party k (see problem {(2.6), (2.8) - (2.10)} leads to the increase of ratio $V_i/(cx_i + 1)$, while ratios for the other parties remain intact, so can not occur (2.9). Therefore the DLG method is immune to the paradox of Population.▼

With refer to the New State paradox, when applying DLG method, the value of x'_{n+1} is determined from the obvious conditions $V_i/[c(x_i + 1) + 1] < V'_{n+1}/(cx'_{n+1} + 1)$, $i = 1..n$ şi $V'_{n+1}/[c(x'_{n+1} + 1) + 1] < \max\{V_i/[c(x_i + 1) + 1], i = 1..n\}$. This does not affect in any way the relations between ratios $V_i/[c(x_i + 1) + 1]$, $i = 1..n$, thus are preserved intact the values of x_i, $i = 1,...,n$. Therefore, occurs (1.12) and DLG method is immune to the New State paradox (see problem {(2.2), (2.10) - (2.12)}). ■

Consequence 3.1. The d'Hondt and Sainte-Laguë methods are immune to Alabama, of Population and of New State paradoxes.

Really, these methods are particular cases of DLG method: d'Hondt method – at $c = 1$, and the Sainte-Laguë one – at $c = 2$, the DLG method being, according to proposition 3.1, immune to the three mentioned paradoxes.■

4. Monotony of Hamilton and Mixed methods at *n* = 2

această secțiune, ea este imună la paradoxurile Alabama şi cel al Populației.

Afirmația 4.1. La $n = 2$, metodele Hamilton şi Mixtă sunt imune la paradoxurile Alabama şi cel al Populației; mai mult ca atât, metoda Mixtă este imună şi la paradoxul Noului stat.

Într-adevăr, conform [6] la $n = 2$ soluțiile problemei {(2.2), (2.4), (2.5)}, obținute la folosirea metodelor Hamilton, Mixtă şi Divizor liniar general coincid. Astfel, în baza afirmației 3.1, odată cu metoda DLG sunt imune la paradoxurile Alabama şi cel al Populației şi metodele cercetate, metoda Mixtă fiind imună şi la paradoxul Noului stat. ■

Faptul poate fi demonstrat şi nemijlocit, de exemplu, pentru paradoxul Alabama. La $n = 2$, deoarece $0 \le \Delta M \le n - 1$, mărimea ΔM poate primi doar una din valorile 0 sau 1. Dacă $\Delta M = 0$, atunci $x_i = a_i$, $i = 1..n$, adică $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$. Totodată, în baza (2.5) şi (2.15), are loc $\Delta x_1^{'} + \Delta x_2^{'} = 1$, de unde $0 \le \Delta x_i^{'} \le 1, i = 1..2$. Deci are loc şi (1.4).▼

Dacă $\Delta M = 1$, atunci mărimea $\Delta M^{'}$ poate primi doar una din valorile 0 sau 1. În cazul că $\Delta M^{'} = 0$, în baza (2.13), avem:

a) dacă $x_1 = a_1 + 1$ şi $x_2 = a_2$, atunci $a_1^{'} = x_1^{'} = a_1 + 1$ şi $x_2^{'} = a_2 + 1 = a_2^{'}$ şi are loc (2.4);
b) dacă $x_1 = a_1$ şi $x_2 = a_2 + 1$, atunci $a_1^{'} = x_1^{'} = a_1 + 1$ şi $x_2^{'} = a_2 + 1 = a_2^{'}$ şi are loc (2.4).▼

Dacă însă $\Delta M^{'} = 1$, atunci în baza (2.13) pot fi doar două cazuri:

c) $a_1^{'} = a_1 + 1$ şi $a_2^{'} = a_2$;
d) $a_1^{'} = a_1$ şi $a_2^{'} = a_2 + 1$.

<u>Fie are loc cazul (c)</u> $a_1^{'} = a_1 + 1$ şi $a_2^{'} = a_2$. Dacă $\Delta x_2 = 0$, atunci are loc (1.4). Dacă însă $\Delta x_2 = 1$, atunci pentru ca să aibă loc (2.4) trebuie să aibă loc şi $\Delta x_2^{'} = 1$, adică:

- la metoda Hamilton, trebuie să fie $\Delta V_2^{'} > \Delta V_1^{'}$. Deoarece $\Delta x_2 = 1$, are loc $\Delta V_2 > \Delta V_1$. Totodată, deoarece $\Delta M = 1$, are loc $\Delta V_1 + \Delta V_2 = Q$, deci $\Delta V_2 > Q/2$. Pentru satisfacerea (1.4), este suficient de demonstrat că are loc şi $\Delta V_2^{'} > Q_2^{'}/2$. Într-adevăr, avem $\Delta V_2^{'} > \Delta V_2 > Q/2 > Q^{'}/2$. Astfel are loc şi (2.4) ▼;
- la metoda Mixtă, trebuie să fie $V_2/(ca_2^{'}+1)$ = $V_2(ca_2 + 1) > V_1/(ca_1^{'}+1)$ = $V_1/[c(a_1 + 1) + 1]$. Deoarece $\Delta x_2 = 1$, are loc $V_2(ca_2 + 1) > V_1(ca_1 + 1)$ şi obținem $V_2(ca_2 + 1) > V_1(ca_1 + 1) > V_1/[c(a_1 + 1) + 1]$. Deci are loc şi (2.4).▼

Hamilton method is considered one no monotone [1]. However, at $n = 2$, as will be proved in this section, it is immune to Alabama and of Population paradoxes.

Proposition 4.1. At $n = 2$, Hamilton and Mixed methods are immune to Alabama and of Population paradoxes; moreover, Mixed method is immune to the New State paradox, too.

Indeed, according to [6], at $n = 2$ the solutions of problem {(2.2), (2.4), (2.5)}, obtained when applying the Hamilton, Mixed and General Linear Divisor methods, coincide. So, basing on proposition 3.1, with the DLG method, are immune to Alabama and of Population paradoxes the investigated methods, too, the Mixed method being immune also to the New State paradox.■

That can be proved directly. Below an example is given for Alabama paradox. At $n = 2$, because $0 \le \Delta M \le n - 1$, parameter ΔM can receive only one of the values 0 or 1. If $\Delta M = 0$, then $x_i = a_i$, $i = 1,...,n$, i.e. $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$. At the same time, basing on (2.5) and (2.15), occurs $\Delta x_1^{'} + \Delta x_2^{'} = 1$, from where $0 \le \Delta x_i^{'} \le 1, i = 1..2$. So also takes place (1.4).▼

If $\Delta M = 1$, then parameter $\Delta M^{'}$ can receive only one of the values 0 or 1. In case of $\Delta M^{'} = 0$, basing on (2.13), we have:

e) if $x_1 = a_1 + 1$ and $x_2 = a_2$, then $a_1^{'} = x_1^{'} = a_1 + 1$ and $x_2^{'} = a_2 + 1 = a_2^{'}$ and takes place (2.4);
f) if $x_1 = a_1$ and $x_2 = a_2 + 1$, then $a_1^{'} = x_1^{'} = a_1 + 1$ and $x_2^{'} = a_2 + 1 = a_2^{'}$ and takes place (2.4).▼

But if $\Delta M^{'} = 1$, than basing on (2.13) only two cases can be:

g) $a_1^{'} = a_1 + 1$ and $a_2^{'} = a_2$;
h) $a_1^{'} = a_1$ and $a_2^{'} = a_2 + 1$.

<u>Let occurs case (c)</u>: $a_1^{'} = a_1 + 1$ and $a_2^{'} = a_2$. If $\Delta x_2 = 0$, then takes place (1.4). But if $\Delta x_2 = 1$, then in order to occur (2,4) it must also take place $\Delta x_2^{'} = 1$, i.e.:

- when applying Hamilton method, it must be $\Delta V_2^{'} > \Delta V_1^{'}$. Because of $\Delta x_2 = 1$, occurs $\Delta V_2 > \Delta V_1$. At the same time, because of $\Delta M = 1$, takes place $\Delta V_1 + \Delta V_2 = Q$, so $\Delta V_2 > Q/2$. To satisfy (1.4), it suffices to prove that $\Delta V_2^{'} > Q_2^{'}/2$ also occurs. Really, we have $\Delta V_2^{'} > \Delta V_2 > Q/2 > Q^{'}/2$. So, also occurs (2.4) ▼;
- when applying Mixed method, it must be $V_2/(ca_2^{'}+1)$ = $V_2(ca_2 + 1) > V_1/(ca_1^{'}+1)$ = $V_1/[c(a_1 + 1) + 1]$. Because of $\Delta x_2 = 1$, occurs $V_2(ca_2 + 1) > V_1(ca_1 + 1)$ and we obtain $V_2(ca_2 + 1) > V_1(ca_1 + 1) > V_1/[c(a_1 + 1) + 1]$. So, also occurs (2.4).▼

<u>Let occurs case (d)</u>: $a_1^{'} = a_1$ and $a_2^{'} = a_2 + 1$. If

Fie are loc cazul (d) $a_1^{'} = a_1$ şi $a_2^{'} = a_2 + 1$. Dacă $\Delta x_1 = 0$, atunci are loc (2.4). Dacă însă $\Delta x_1 = 1$, atunci pentru ca să se satisfacă (2.4) trebuie să aibă loc şi $\Delta x_1^{'} = 1$, adică:

- la metoda Hamilton, trebuie să fie $\Delta V_1^{'} > \Delta V_2^{'}$. Deoarece $\Delta x_1 = 1$, are loc $\Delta V_1 > \Delta V_2$. Totodată, deoarece $\Delta M = 1$, are loc $\Delta V_1 + \Delta V_2 = Q$, deci $\Delta V_1 > Q/2$. Pentru satisfacerea (2.4), este suficient de demonstrat că are loc şi $\Delta V_1^{'} > Q_1^{'}/2$. Într-adevăr, avem $\Delta V_1^{'} > \Delta V_1 > Q/2 > Q^{'}/2$. Astfel are loc şi (2.4) ▼;
- la metoda Mixtă, trebuie să fie $V_1/(ca_1^{'}+1)$ = $V_1(ca_1 + 1) > V_2/(ca_2^{'}+1)$ = $V_2/[c(a_2 + 1) + 1]$. Deoarece $\Delta x_1 = 1$, are loc $V_1(ca_1 + 1) > V_2(ca_2 + 1)$ şi obţinem $V_1(ca_1 + 1) > V_2(ca_2 + 1) > V_2/[c(a_2 + 1) + 1]$. Deci are loc şi (2.4). ▼

Astfel, la $n = 2$, pentru metodele Hamilton şi Mixtă are loc (2.4). ■

În ce priveşte paradoxul Noului stat, metoda Hamilton nu este imună nici la $n = 2$ – există situaţii, când adăugarea celui de al treilea stat conduce la paradoxul în cauză (vezi exemplul 4.1).

Afirmaţia 4.2. La $n = 2$ (indiferent $V_1 > V_2$ sau $V_1 < V_2$), paradoxul Noului stat nu va avea loc nici în unul din următoarele două cazuri:

1) daca la $\Delta V_1 < \Delta V_2$, $a_1^{'} = a_1$, $a_2^{'} = a_2$ şi $\Delta V_1^{'} < \Delta V_2^{'}$ va avea loc

$$M^{'}\max\{V_1/(a_1 + 1), V_2/(a_2 + 1), (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)\} - V < V_3 < M^{'}\min\{V_1/a_1, V_2/a_2\} - V; \quad (2.21)$$

2) daca la $\Delta V_1 < \Delta V_2$ şi $a_2^{'} = a_2 + 1$ va avea loc

$$M^{'}V_2/(a_2 + 2) - V < V_3 < M^{'}V_2/(a_2 + 1) - V. \quad (2.22)$$

Într-adevăr, la $\Delta V_1 < \Delta V_2$, au loc $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 + 1$ şi, deoarece $\Delta V_1 = V_1 - Qa_1$, $\Delta V_2 = V_2 - Qa_2$, obţinem $Q > (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)$. În asemenea condiţii, paradoxul Noului stat nu are loc în fiecare din cazurile:

1) $a_1^{'} = a_1$, $a_2^{'} = a_2$, $\Delta V_1^{'} < \Delta V_2^{'}$;

2) $a_2^{'} = a_2 + 1$.

Primul, din aceste două cazuri, are loc dacă $Q^{'}a_1 < V_1 < Q^{'}(a_1 + 1)$, $Q^{'}a_2 < V_2 < Q^{'}(a_2 + 1)$, sau $V_1/(a_1 + 1) < Q^{'} < V_1/a_1$ şi $V_2/(a_2 + 1) < Q^{'} < V_2/a_2$, şi $Q^{'} > (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)$. Deci $\max\{V_1/(a_1 + 1), V_2/(a_2 + 1), (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)\} < Q^{'} < \min\{V_1/a_1, V_2/a_2\}$. Totodată, $Q^{'} = (V_1 + V_2 + V_3)/(M + x_3^{'}) = (V + V_3)/(M + x_3^{'}) = (V + V_3)/M^{'}$. Înlocuind, obţinem (2.21).

Un exemplu cu acest caz este prezentat în tabelul 4.1 (cazul 1).

Al doilea, din aceste două cazuri, are loc dacă $Q^{'}(a_2 + 1) < V_2 < Q^{'}(a_2 + 2)$, de unde $V_2/(a_2 + 2) < Q^{'} < V_2/(a_2 + 1)$, sau, ţinând cont că $Q^{'} = (V + V_3)/(M + x_3^{'})$, avem $V_2/(a_2 + 2) < (V + V_3)/(M + x_3^{'}) < V_2/(a_2 + 1)$, de unde obţinem (2.22).

Un exemplu cu acest caz este prezentat în tabelul 4.1 (cazul 2).

$\Delta x_1 = 0$, then takes place (2.4). But if $\Delta x_1 = 1$, then to satisfy (2.4) must also occur $\Delta x_1^{'} = 1$, i.e.:

- when applying Hamilton method, it must be $\Delta V_1^{'} > \Delta V_2^{'}$. Because of $\Delta x_1 = 1$, occurs $\Delta V_1 > \Delta V_2$. At the same time, because of $\Delta M = 1$, takes place $\Delta V_1 + \Delta V_2 = Q$, so $\Delta V_1 > Q/2$. To satisfy (1.4), it suffices to prove that $\Delta V_1^{'} > Q_1^{'}/2$. Really, we have $\Delta V_1^{'} > \Delta V_1 > Q/2 > Q^{'}/2$. So, also occurs (2.4) ▼;
- when applying Mixed method, it must be $V_1/(ca_1^{'}+1)$ = $V_1(ca_1 + 1) > V_2/(ca_2^{'}+1)$ = $V_2/[c(a_2 + 1) + 1]$. Because of $\Delta x_1 = 1$, occurs $V_1(ca_1 + 1) > V_2(ca_2 + 1)$ and we obtain $V_1(ca_1 + 1) > V_2(ca_2 + 1) > V_2/[c(a_2 + 1) + 1]$. So, also occurs (2.4). ▼

Thus, at $n = 2$, for Hamilton and Mixed methods takes place (2.4). ■

With refer to New State paradox, Hamilton method is not immune either at $n = 2$ – there are situations when adding the third state leads to the paradox in question (see example 4.1).

Proposition 4.2. At $n = 2$ (regardless of $V_1 > V_2$ or $V_1 < V_2$), the New State paradox does not occur either in one of two cases:

1) if at $\Delta V_1 < \Delta V_2$, $a_1^{'} = a_1$, $a_2^{'} = a_2$ and $\Delta V_1^{'} < \Delta V_2^{'}$ will take place

$$M^{'}\max\{V_1/(a_1 + 1), V_2/(a_2 + 1), (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)\} - V < V_3 < M^{'}\min\{V_1/a_1, V_2/a_2\} - V; \quad (2.21)$$

2) if at $\Delta V_1 < \Delta V_2$ and $a_2^{'} = a_2 + 1$ will take place

$$M^{'}V_2/(a_2 + 2) - V < V_3 < M^{'}V_2/(a_2 + 1) - V. \quad (2.22)$$

Indeed, at $\Delta V_1 < \Delta V_2$, occur $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 + 1$ and, because of $\Delta V_1 = V_1 - Qa_1$, $\Delta V_2 = V_2 - Qa_2$, we obtain $Q > (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)$. In such situations, the New State paradox does not occur either in one of two cases:

1) $a_1^{'} = a_1$, $a_2^{'} = a_2$, $\Delta V_1^{'} < \Delta V_2^{'}$;

2) $a_2^{'} = a_2 + 1$.

The first of these two cases occurs if $Q^{'}a_1 < V_1 < Q^{'}(a_1 + 1)$, $Q^{'}a_2 < V_2 < Q^{'}(a_2 + 1)$, or $V_1/(a_1 + 1) < Q^{'} < V_1/a_1$ and $V_2/(a_2 + 1) < Q^{'} < V_2/a_2$, and $Q^{'} > (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)$. So $\max\{V_1/(a_1 + 1), V_2/(a_2 + 1), (V_1 - V_2)/(a_1 - a_2)\} < Q^{'} < \min\{V_1/a_1, V_2/a_2\}$. At the same time, $Q^{'} = (V_1 + V_2 + V_3)/(M + x_3^{'}) = (V + V_3)/(M + x_3^{'}) = (V + V_3)/M^{'}$. Substituting, we get (2.21).

An example of this case is shown in table 4.1 (case 1).

The second of these two cases occurs if $Q^{'}(a_2 + 1) < V_2 < Q^{'}(a_2 + 2)$, from where $V_2/(a_2 + 2) < Q^{'} < V_2/(a_2 + 1)$, or, taking into account that $Q^{'} = (V + V_3)/(M + x_3^{'})$, we have $V_2/(a_2 + 2) < (V + V_3)/(M + x_3^{'}) < V_2/(a_2 + 1)$, from where we obtain (2.22).

An example of this case is shown in table 4.1 (case 2).

Example 4.1. For $n = 2$, $M = 12$, $V = 12000$; $n^{'} = 3$, $M^{'} = 13$, five cases are shown in table 4.1.

Tabelul 4.1 / Table 4.1

Cinci cazuri de aplicare a metodei Hamilton, paradoxul Noului stat / Five cases of applying Hamilton method, New State paradox

Cazul/ Case	i	V_i	a_i	ΔV_i	x_i	$V_i^{`}$	$a_i^{`}$	$\Delta V_i^{`}$	$x_i^{`}$
1	1	10499	10	499	10	10499	10	500,5	10
	2	1501	1	501	2	1501	1	501,2	2
	3					998	0	998	1
2	1	10001	10	1	10	10001	10	6,4	10
	2	1999	1	999	2	1999	2	0,1	2
	3					993	0	993	1
3	1	10501	10	501	11	10501	10	577,9	11
	2	1499	1	499	1	1499	1	506,7	1
	3					900	1	900	1
4	1	10501	10	501	11	10501	10	424,1	10
	2	1499	1	499	1	1499	1	491,3	2
	3					1100	1	92,3	1
5	1	10499	10	499	10	10499	10	575,9	11
	2	1501	1	501	2	1501	1	508,7	1
	3					900	0	900	1

După cum se poate observa din tabelul 4.1, la aplicarea metodei Hamilton, în cazurile 1-3 paradoxul Noului stat nu are loc, iar în cele 4 şi 5 – are loc.

5. Nonmonotonia metodei Hamilton la $n \geq 3$

După cum s-a văzut în s. 4, deja la $n = 2$ metoda Hamilton poate să nu fie imună la paradoxul Noului stat ($n' \geq 3$), unele exemple fiind prezentate în tabelul 4.1. Cu atât mai mult metoda Hamilton nu este imună la paradoxul Noului stat la $n \geq 3$. Să cercetăm situaţia cu imunitatea metodei Hamilton la paradoxul Alabama la $n \geq 3$.

Afirmaţia 5.1. La $n \geq 3$, metoda Hamilton poate să nu satisfacă cerinţele (2.4) de monotonie la paradoxul Alabama.

<u>Cazul $n = 3$</u>. Într-adevăr, la $n = 3$, atât ΔM cât şi $\Delta M'$ pot avea doar una din valorile 0, 1 sau 2.

1. Dacă $\Delta M = 0$, atunci în baza (2.15) are loc şi (2.4).▼

2. Dacă $\Delta M = 1$, atunci evident cel mai convenabil caz, pentru nesatisfacerea condiţiilor (2.4), este cel, pentru care în condiţiile (2.1) au loc inegalităţile

$$\Delta V_1 < \Delta V_2 < \Delta V_3, \quad (5.1)$$

ceea ce conduce la

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,\ \Delta x_3 = 1, \quad (5.2)$$

şi noul mandat să-i revină primului (sau celui de al doilea) partid, iar un mandat de la al treilea partid să fie preluat de cel de al doilea (sau de primul) partid.

2.1. În cazul $\Delta M' = 0$, în baza (2.15) are loc şi (2.4).▼

2.2. În cazul $\Delta M' = 1$ sau cel $\Delta M' = 2$, pentru ca să nu se îndeplinească (2.4), trebuie să aibă loc

$$a_3^{'} = a_3 \quad (5.3)$$

şi, de asemenea, următoarele două condiţii

As can be seen from table 4.1, when applying Hamilton method, the New State paradox does not occur in cases 1-3, and takes place – in cases 4 and 5.

5. No monotony of Hamilton method at $n \geq 3$

As seen in s. 4, already at $n = 2$ Hamilton method may not be immune to New State paradox ($n' \geq 3$), some examples being shown in table 4.1. Moreover, Hamilton method is not immune to New State paradox at $n \geq 3$. Let's examine the situation with immunity of Hamilton method to Alabama paradox at $n \geq 3$.

Proposition 5.1. At $n \geq 3$, Hamilton method may not satisfy requirements (2.4) of monotony to Alabama paradox.

<u>Case $n = 3$</u>. Indeed, at $n = 3$, both ΔM and $\Delta M'$ 'can have only one of the values 0, 1 or 2.

1. If $\Delta M = 0$, then basing on (2.15) also takes place (2.4).▼

2. If $\Delta M = 1$, then obviously the most convenient case for failure to satisfy the conditions (2.4), is that, for which in conditions (2.1) occurs the inequalities

$$\Delta V_1 < \Delta V_2 < \Delta V_3, \quad (5.1)$$

which leads to

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,\ \Delta x_3 = 1, \quad (5.2)$$

and the new seat to go to the first (or to the second) party, and a seat from the third party to be taken over by the second (or by the first) party.

2.1. In case of $\Delta M' = 0$, basing on (2.15) also takes place (2.4).▼

2.2. In case of $\Delta M' = 1$ or that of $\Delta M' = 2$, for failure to satisfy (2.4), must take place

$$a_3^{'} = a_3 \quad (5.3)$$

and also the following two conditions

$$\Delta W_1^{'} > \Delta V_3^{'},\ \Delta W_2^{'} > \Delta V_3^{'}, \quad (5.4)$$

unde $\Delta W_i^{'} = V_i - a_i Q^{'}, i = 1..3$.

Din (5.1) avem

$$\begin{cases} \Delta V_1 = V_1 - a_1 Q < \Delta V_3 = V_3 - a_3 Q \\ \Delta V_2 = V_2 - a_2 Q < \Delta V_3 = V_3 - a_3 Q \end{cases} \quad (5.5)$$

sau

$$\begin{cases} V_1 - V_3 < (a_1 - a_3)Q \\ V_2 - V_3 < (a_2 - a_3)Q. \end{cases} \quad (5.6)$$

Totodată, din (5.4) obținem

$$\begin{cases} \Delta W_1^{'} = V_1 - a_1 Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3 Q' \\ \Delta W_2^{'} = V_2 - a_2 Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3 Q' \end{cases}$$

sau, ținând cont de (2.18),

$$\Delta W_1^{'} > \Delta V_3^{'},\ \Delta W_2^{'} > \Delta V_3^{'}, \quad (5.4)$$

where $\Delta W_i^{'} = V_i - a_i Q^{'}, i = 1..3$.

From (5.1) we have

$$\begin{cases} \Delta V_1 = V_1 - a_1 Q < \Delta V_3 = V_3 - a_3 Q \\ \Delta V_2 = V_2 - a_2 Q < \Delta V_3 = V_3 - a_3 Q \end{cases} \quad (5.5)$$

or

$$\begin{cases} V_1 - V_3 < (a_1 - a_3)Q \\ V_2 - V_3 < (a_2 - a_3)Q. \end{cases} \quad (5.6)$$

At the same time, from (5.4) we obtain

$$\begin{cases} \Delta W_1^{'} = V_1 - a_1 Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3 Q' \\ \Delta W_2^{'} = V_2 - a_2 Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3 Q' \end{cases}$$

or, taking into account of (2.18),

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > (a_1 - a_3)Q' = (a_1 - a_3)QM/(M+1) \\ V_2 - V_3 > (a_2 - a_3)Q' = (a_2 - a_3)QM/(M+1). \end{cases} \quad (5.7)$$

Îmbinând (5.4) şi (5.5), obținem condițiile neîndeplinirii (2.4) la $n = 3$ şi $\Delta M = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_1 - V_3}{Q(a_1 - a_3)} < 1 \\ \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_2 - V_3}{Q(a_2 - a_3)} < 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

sau

$$\begin{cases} M < \dfrac{V(a_1 - a_3)}{V_1 - V_3} < M+1 \\ M < \dfrac{V(a_2 - a_3)}{V_2 - V_3} < M+1. \end{cases} \blacktriangledown \quad (5.9)$$

3. Dacă $\Delta M = 2$, adică $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 2Q$, atunci evident cel mai convenabil caz, pentru nesatisfacerea cerințelor (2.4), este cel, pentru care au loc inegalitățile

$$\Delta V_2 < \Delta V_3 < \Delta V_1,\ \Delta V_1 > 2Q/3,\ \Delta V_3 > Q/2, \quad (5.10)$$

ceea ce conduce la

$$\Delta x_1 = \Delta x_3 = 1,\ \Delta x_2 = 0 \quad (5.11)$$

şi noul mandat să-i revină primului (sau celui de al doilea) partid, iar un mandat de la al treilea partid să fie preluat de cel de al doilea (sau de primul) partid. Totodată, nesatisfacerea cerințelor (2.4) poate fi doar dacă are loc (5.3) şi, ținând cont de (2.1) şi (5.10) (inclusiv în sensul că $\Delta V_1 + \Delta V_3 > 7Q/6 > Q$, $\Delta V_2 < \Delta V_3 < \Delta V_1$ şi $V_1 > V_3$), de asemenea, dacă

$$a_1^{'} = a_1 + 1. \quad (5.12)$$

3.1. Dacă $\Delta M' = 0$, atunci ținând cont de (2.15) are loc şi (2.4).▼

3.2. În cazul $\Delta M' = 1$, adică $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = Q'$, nu poate fi nici

Combining (5.4) and (5.5), we obtain the conditions for the failure of satisfying (2.4) at $n = 3$ and $\Delta M = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_1 - V_3}{Q(a_1 - a_3)} < 1 \\ \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_2 - V_3}{Q(a_2 - a_3)} < 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

or

$$\begin{cases} M < \dfrac{V(a_1 - a_3)}{V_1 - V_3} < M+1 \\ M < \dfrac{V(a_2 - a_3)}{V_2 - V_3} < M+1. \end{cases} \blacktriangledown \quad (5.9)$$

3. If $\Delta M = 2$, i.e. $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 2Q$, then obviously the most convenient case, for the failure of satisfying requirements (2.4), is that, for which occur the inequalities

$$\Delta V_2 < \Delta V_3 < \Delta V_1,\ \Delta V_1 > 2Q/3,\ \Delta V_3 > Q/2, \quad (5.10)$$

that leads to

$$\Delta x_1 = \Delta x_3 = 1,\ \Delta x_2 = 0 \quad (5.11)$$

and the new seat to go to the first (or to the second) party, and a seat from the third party to be taken over by the second (or by the first) party. However, the failure of satisfying the requirements (2.4) can take place only if (5.3) and, in view of (2.1) and (5.10) (including the meaning of $\Delta V_1 + \Delta V_3 > 7Q/6 > Q$, $\Delta V_2 < \Delta V_3 < \Delta V_1$ and $V_1 > V_3$), also if

$$a_1^{'} = a_1 + 1. \quad (5.12)$$

3.1. If $\Delta M' = 0$, then taking into account (2.15) also takes place (2.4).▼

3.2. In case of $\Delta M' = 1$, ie $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = Q'$, there cannot be both either

$\Delta V_1^{'} > \Delta V_3^{'}$ şi nici $\Delta V_2^{'} > \Delta V_3^{'}$, deoarece (vezi (5.10)) $\Delta V_3 > Q/2$ şi $\Delta V_3^{'} > \Delta V_3$, deci $\Delta V_3^{'} > Q/2$. Astfel, chiar dacă $a_2^{'} = a_1 + 1$, oricum $\Delta x_3^{'} = 1$ şi are loc (2.4).▼

3.3. În cazul $\Delta M^{'} = 2$, adică $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = 2Q'$, are loc

$$a_2^{'} = a_2. \tag{5.13}$$

Într-adevăr, la $a_2^{'} = a_2 + 1$, ar fi $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = V_1 - (a_1 + 1)Q^{'} + V_2 - (a_2 + 1)Q^{'} + V_3 - a_3Q' = V_1 + V_2 + V_3 - Q^{'}(a_1 + a_2 + a_3 + 2) = V - MQ' = (M + 1)\,Q' - MQ' = Q'$, ceea ce contravine cazului $\Delta M^{'} = 2$, căruia îi corespunde $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = 2Q'$.

Astfel, în condiţiile (5.10)-(5.13), pentru ca să nu se îndeplinească (2.4), trebuie să aibă loc (5.3) şi următoarele două condiţii

$$\Delta V_1^{'} > \Delta V_3^{'},\ \Delta V_2^{'} > \Delta V_3^{'}. \tag{5.14}$$

Din (5.10) avem

$$\begin{cases} \Delta V_1 = V_1 - a_1Q > \Delta V_3 = V_3 - a_3Q \\ \Delta V_2 = V_2 - a_2Q < \Delta V_3 = V_3 - a_3Q \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > (a_1 - a_3)Q \\ V_2 - V_3 < (a_2 - a_3)Q. \end{cases} \tag{5.15}$$

Totodată, din (5.14), luând în consideraţie (5.12) şi (5.13), obţinem

$$\begin{cases} \Delta V_1^{'} = V_1 - (a_1 + 1)Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3Q' \\ \Delta V_2^{'} = V_2 - a_2Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3Q' \end{cases}$$

sau, ţinând cont de (2.18),

$\Delta V_1^{'} > \Delta V_3^{'}$ nor $\Delta V_2^{'} > \Delta V_3^{'}$, because (see (5.10)) $\Delta V_3 > Q/2$ and $\Delta V_3^{'} > \Delta V_3$, so $\Delta V_3^{'} > Q/2$. Thus, even if there is $a_2^{'} = a_1 + 1$, anyway $\Delta x_3^{'} = 1$ and occurs (2.4).▼

3.3. In case of $\Delta M^{'} = 2$, ie $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = 2Q'$, takes place

$$a_2^{'} = a_2. \tag{5.13}$$

Really, at $a_2^{'} = a_2 + 1$, it would be $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = V_1 - (a_1 + 1)Q^{'} + V_2 - (a_2 + 1)Q^{'} + V_3 - a_3Q' = V_1 + V_2 + V_3 - Q^{'}(a_1 + a_2 + a_3 + 2) = V - MQ' = (M + 1)\,Q' - MQ' = Q'$, which is contrary to the case $\Delta M' = 2$, to which corresponds $\Delta V_1^{'} + \Delta V_2^{'} + \Delta V_3^{'} = 2Q'$.

Thus, in conditions (5.10)-(5.13), for not to fulfil (2.4) must occur (5.3) and the following two conditions

$$\Delta V_1^{'} > \Delta V_3^{'},\ \Delta V_2^{'} > \Delta V_3^{'}. \tag{5.14}$$

From (5.10) we have

$$\begin{cases} \Delta V_1 = V_1 - a_1Q > \Delta V_3 = V_3 - a_3Q \\ \Delta V_2 = V_2 - a_2Q < \Delta V_3 = V_3 - a_3Q \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > (a_1 - a_3)Q \\ V_2 - V_3 < (a_2 - a_3)Q. \end{cases} \tag{5.15}$$

Moreover, from (5.14), taking into account (5.12) and (5.13), we obtain

$$\begin{cases} \Delta V_1^{'} = V_1 - (a_1 + 1)Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3Q' \\ \Delta V_2^{'} = V_2 - a_2Q' > \Delta V_3^{'} = V_3 - a_3Q' \end{cases}$$

or, taking into account (2.18),

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > (a_1 - a_3 + 1)Q' = (a_1 - a_3 + 1)QM/(M+1) \\ V_2 - V_3 > (a_2 - a_3)Q' = (a_2 - a_3)QM/(M+1). \end{cases} \tag{5.16}$$

Îmbinând (5.15) şi (5.16), obţinem

Combining (5.15) and (5.16), we obtain

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > Q\max\{a_1 - a_3, (a_1 - a_3 + 1)M/(M+1)\} \\ \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_2 - V_3}{Q(a_2 - a_3)} < 1. \end{cases} \tag{5.17}$$

În acelaşi timp, avem $(a_1 - a_3 + 1)M/(M + 1) = M/(M + 1) + M(a_1 - a_3)/(M + 1) > (a_1 - a_3)/(M + 1) + M(a_1 - a_3)/(M + 1) = a_1 - a_3$. Astfel, condiţiile (5.17) de neîndeplinire a cerinţelor (2.4) la $n = 3$ şi $\Delta M = 2$ se reduc la

At the same time, we have $(a_1 - a_3 + 1)M/(M + 1) = M/(M + 1) + M(a_1 - a_3)/(M + 1) > (a_1 - a_3)/(M + 1) + M(a_1 - a_3)/(M + 1) = a_1 - a_3$. Thus, conditions (5.17) of the failure of requirements (2.4) at $n = 3$ and $\Delta M = 2$ are reducing to

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > QM(a_1 - a_3 + 1)/(M+1) \\ \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_2 - V_3}{Q(a_2 - a_3)} < 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{V(a_1 - a_3 + 1)}{V_1 - V_3} < M + 1 \\ M < \dfrac{V(a_2 - a_3)}{V_2 - V_3} < M + 1 \end{cases} \blacktriangledown \qquad (5.18)$$

Îmbinând (5.9) şi (5.18), obţinem condiţiile de neîndeplinire a cerinţelor (2.4) la $n = 3$

$$\begin{cases} M < \dfrac{V(a_1 - a_3)}{V_1 - V_3} < M + 1, \text{ la } \Delta M = 1 \\ \dfrac{V(a_1 - a_3 + 1)}{V_1 - V_3} < M + 1, \text{ la } \Delta M = 2 \\ M < \dfrac{V(a_2 - a_3)}{V_2 - V_3} < M + 1. \end{cases} \qquad (5.19)$$

Toate cele trei condiţii din (5.19) pot avea loc. ▼

Cazul $n > 3$. La $n > 3$, se extinde, faţă de cazul $n = 3$, gama de situaţii, în care, la creşterea numărului de mandate, se satisfac cerinţele, inclusiv similare celor (5.19), de preluare de către unele partide de mandate de la alte partide. ■

Exemplul 5.1. Fie: $n = 3$, $M = 203$, $Q = 50$, $V_1 = 5066$, $V_2 = 5016$, $V_3 = 68$. De verificat dacă are loc paradoxul Alabama la $M' = 204$.

Ţinând cont că $a_i = \lfloor V_i/Q \rfloor$, avem: $a_1 = 101$, $a_2 = 100$ şi $a_3 = 1$; $\Delta M = 1$. De asemenea, $V = 5066 + 5016 + 68 = 10150$ şi, deoarece (vezi (1.11)) $Q' = QM/(M+1) = 50 \cdot 203/204 = 5075/102$, avem: $a_1' = \lfloor V_1/Q' \rfloor = 101$, $a_2' = \lfloor V_2/Q' \rfloor = 100$ şi $a_3' = \lfloor V_3/Q' \rfloor = 1$; $\Delta M' = 2$.

Condiţiile (5.19) obţin forma

$$\begin{cases} 203 < \dfrac{10150(101-1)}{5066-68} \approx 203{,}0812 < 204 \\ 203 < \dfrac{10150(100-1)}{5016-68} \approx 203{,}0821 < 204 \end{cases}$$

şi se satisfac, deci nu ar trebui să se îndeplinească cerinţele (2.4).

Să verificăm îndeplinirea cerinţelor (2.4). Avem:

$\Delta V_1 = V_1 - a_1 Q = 5066 - 101 \cdot 50 = 16$;

$\Delta V_2 = V_2 - a_2 Q = 5016 - 100 \cdot 50 = 16$;

$\Delta V_3 = V_3 - a_3 Q = 68 - 1 \cdot 50 = 18$.

Deci $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$, $\Delta x_3 = 1$ şi

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1 = 101,\ x_2 = a_2 + \Delta x_2 = 100,\ x_3 = a_3 + \Delta x_3 = 2. \qquad (5.20)$$

$$\begin{cases} V_1 - V_3 > QM(a_1 - a_3 + 1)/(M+1) \\ \dfrac{M}{M+1} < \dfrac{V_2 - V_3}{Q(a_2 - a_3)} < 1 \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \dfrac{V(a_1 - a_3 + 1)}{V_1 - V_3} < M + 1 \\ M < \dfrac{V(a_2 - a_3)}{V_2 - V_3} < M + 1 \end{cases} \blacktriangledown \qquad (5.18)$$

Combining (5.9) and (5.18), we obtain the conditions of failure of requirements (2.4) at $n = 3$

$$\begin{cases} M < \dfrac{V(a_1 - a_3)}{V_1 - V_3} < M + 1, \text{ at } \Delta M = 1 \\ \dfrac{V(a_1 - a_3 + 1)}{V_1 - V_3} < M + 1, \text{ at } \Delta M = 2 \\ M < \dfrac{V(a_2 - a_3)}{V_2 - V_3} < M + 1. \end{cases} \qquad (5.19)$$

All three terms in (5.19) can take place. ▼

Case $n > 3$. At $n > 3$, extends, as against the case $n = 3$, the range of situations in which, to the increase of the number of seats, are satisfied the requirements, including similar to the (5.19) ones, of takeover by some parties of seats from other parties. ■

Example 5.1. Let: $n = 3$, $M = 203$, $Q = 50$, $V_1 = 5066$, $V_2 = 5016$, $V_3 = 68$. To verify if Alabama paradox occurs at $M' = 204$.

Taking into account that $a_i = \lfloor V_i/Q \rfloor$, we have: $a_1 = 101$, $a_2 = 100$ and $a_3 = 1$; $\Delta M = 1$. Also, $V = 5066 + 5016 + 68 = 10150$ and, because (see (1.11)) $Q' = QM/(M+1) = 50 \cdot 203/204 = 5075/102$, we have: $a_1' = \lfloor V_1/Q' \rfloor = 101$, $a_2' = \lfloor V_2/Q' \rfloor = 100$ şi $a_3' = \lfloor V_3/Q' \rfloor = 1$; $\Delta M' = 2$.

Conditions (5.19) obtain the form

$$\begin{cases} 203 < \dfrac{10150(101-1)}{5066-68} \approx 203{,}0812 < 204 \\ 203 < \dfrac{10150(100-1)}{5016-68} \approx 203{,}0821 < 204 \end{cases}$$

and are satisfied, so it should not satisfy the requirements (2.4).

Let's check the requirements (2.4). We have:

$\Delta V_1 = V_1 - a_1 Q = 5066 - 101 \cdot 50 = 16$;

$\Delta V_2 = V_2 - a_2 Q = 5016 - 100 \cdot 50 = 16$;

$\Delta V_3 = V_3 - a_3 Q = 68 - 1 \cdot 50 = 18$.

So $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$, $\Delta x_3 = 1$ şi

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1 = 101,\ x_2 = a_2 + \Delta x_2 = 100,\ x_3 = a_3 + \Delta x_3 = 2. \qquad (5.20)$$

De asemenea:

$\Delta V_1^{'} = V_1 - a_1 Q' = 5066 - 101 \cdot 5075/102 = 5066 - 101 \cdot 5075/102 \approx 40{,}75$;

$\Delta V_2^{'} = V_2 - a_2 Q^{'} = 5016 - 100 \cdot 5075/102 \approx 40{,}51$;

$\Delta V_3^{'} = V_3 - a_3 Q^{'} = 68 - 1 \cdot 5075/102 \approx 18{,}25$.

Deci $\Delta x_1^{'} = \Delta x_2^{'} = 1$, $\Delta x_3^{'} = 0$ şi

$$x_1^{'} = a_1^{'} + \Delta x_1^{'} = 102,\ x_2^{'} = a_2^{'} + \Delta x_2^{'} = 101,\ x_3^{'} = a_3^{'} + \Delta x_3^{'} = 1. \qquad (5.21)$$

Comparând (5.20) şi (5.21), se constată neîndeplinirea cerinţelor (2.4) şi anume $x_3^{'} = 1 < x_3 = 2$, deci are loc paradoxul Alabama. ■

6. Concluzii

La creşterea numărului total de mandate cu o unitate, cota de jos poate creşte cu cel mult o unitate. Metoda Divizor liniar general este imună la paradoxurile Alabama, al Populaţiei şi al Noului stat. De asemenea, la $n = 2$ metodele Hamilton şi Mixtă sunt imune la paradoxurile Alabama şi cel al Populaţiei; mai mult ca atât, metoda Mixtă este imună şi la paradoxul Noului stat. La $n \geq 3$, metoda Hamilton poate să nu satisfacă cerinţele (2.4) de monotonie la paradoxul Alabama.

Also:

$\Delta V_1^{'} = V_1 - a_1 Q' = 5066 - 101 \cdot 5075/102 = 5066 - 101 \cdot 5075/102 \approx 40{,}75$;

$\Delta V_2^{'} = V_2 - a_2 Q^{'} = 5016 - 100 \cdot 5075/102 \approx 40{,}51$;

$\Delta V_3^{'} = V_3 - a_3 Q^{'} = 68 - 1 \cdot 5075/102 \approx 18{,}25$.

So $\Delta x_1^{'} = \Delta x_2^{'} = 1$, $\Delta x_3^{'} = 0$ and

$$x_1^{'} = a_1^{'} + \Delta x_1^{'} = 102,\ x_2^{'} = a_2^{'} + \Delta x_2^{'} = 101,\ x_3^{'} = a_3^{'} + \Delta x_3^{'} = 1. \qquad (5.21)$$

Comparing (5.20) and (5.21), one can found a non-compliance with requirements (2.4), namely $x_3^{'} = 1 < x_3 = 2$, so the Alabama paradox occurs. ■

6. Conclusions

When increasing the total number of seats by one unit, the lower quota can increase by at most one. General Linear Divisor method is immune to Alabama, of New State and of Population paradoxes. Also, at $n = 2$ Hamilton and Mixed methods are immune to Alabama and of Population paradoxes; moreover, the Mixed method is immune to New State paradox, too. At $n \geq 3$, Hamilton method may not satisfy the requirements (2.4) of monotony to Alabama paradox.

Referinţe / References:

1. BOLUN, I. *Seats allocation in party-list election*// Economica, nr.2(76)/2011. – Chişinău: Editura ASEM.
2. GALLAGHER, M. *Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems*// Electoral Studies (1991), 10:1, pp. 33-51.
3. TANNENBAUM, P. *Excursions in Modern Mathematics*, Seventh Edition. Pearson, 2008, 704 p.
4. ROBINSON, F. *The Alabama Paradox. Teaching Mathematics and its Applications*, 1982, vol. 1, Issue 2, pp. 69-72.
5. BOLUN, I. *Disproporţionalitatea deciziilor multiopţionale cu reprezentare proporţională*. În: Competitivitatea şi inovarea în economia cunoaşterii, confer. şt. intern., 28-29 sept. 2012. Vol. I. – Chişinău: Editura ASEM, 2012. – p. 20-24. ISBN 978-9975-75-627-3. (0,5 c.a.).
6. BOLUN, I. *Disproporţionalitatea unor reguli "voturi-decizie" în sisteme RP* // ASEM: 20 de ani de ascensiune. – Chişinău: Editura ASEM, 2011.
7. BOLUN, I. *"Votes-decision" monotone method in PR systems*. In: Economica, nr.4(78)/2011. – Chişinău: Editura ASEM. – p. 108-117 (0,5 c.a)