ORDONAREA LUCRĂRILOR MONOTONE ÎN PROBLEMA *Mxn* BELLMAN-JOHNSON

Prof. univ. dr. hab. Ion BOLUN, ASEM

Bellman-Johnson's Mxn scheduling problem with monotone (no decreasing, constant or no increasing) jobs is investigated. Rules for optimal ordering of monotone jobs in the schedule, which contain no monotone jobs too, are proposed. Partial ordering of jobs permits to reduce the volume of calculus and often to improve the quasi optimal schedules. If all n jobs are monotone, particular cases are defined and rules for optimal schedules are proposed

1. Introducere

Problema *Mxn* Bellman-Johnson de ordonare a lucrărilor în sisteme secvenţiale [3], la care se reduce optimizarea diverselor procese tehnologice, nu este încă soluţionată. Sunt obţinute soluţii doar pentru unele cazuri particulare şi propuşi algoritmi de soluţionare cuazioptimă a problemei generale. Astfel, sunt soluţionate: problema 2*xn* [1], patru cazuri particulare pentru problema 3*xn* [1, 6], un caz particular pentru problema 4*xn* [6] şi câteva cazuri particulare pentru problema *Mxn* [2, 4, 6]; algoritmi cuazioptimi sunt propuşi, de exemplu, în [2, 3, 6, 8].

În această lucrare se cercetează unele cazuri particulare ale problemei *Mxn*, ce ţin de ordonarea parţială sau totală a lucrărilor monotone (nedescrescătoare, constante sau necrescătoare).

2. Consideraţii preliminare

Problema *Mxn* Bellman-Johnson constă în următoarele: Fie un sistem secvenţial din *M* unităţi de prelucrare (servoare) ce execută *n* lucrări. Fiecare lucrare se execută, consecutiv, la unităţile 1, 2, 3,…, *M*. În cadrul fiecăreia din servoare nu se admit întreruperi de execuţie a fiecăreia din lucrări. Ordinea execuţiei lucrărilor este aceeaşi pentru toate servoarele sistemului. Fiecare servor, în orice moment de timp, poate fi ocupat cu executarea doar a unei singure lucrări şi începe următoarea lucrare ce aşteaptă imediat după încheierea lucrării precedente. Se cere determinarea ordinii, ce ar asigura durata minimă *T* de execuţie a tuturor *n* lucrări:

$$T = T(R) = \max_{1 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_{M-1} \le n} \left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=u_{j-1}}^{u_j} \tau_{ji_k} \right) \to \min, \quad (1)$$

unde τ_{ji_k} este durata execuţiei lucrării i_k, amplasate în ordonarea *R* pe locul *k*, de către servorul *j* şi, de asemenea, $u_0 = 1$, $u_M = n$.

În unele cazuri se folosesc şi alte criterii de optimizare, de exemplu [2], durata medie t_{med} de execuţie a unei lucrări. Folosirea criteriului t_{med} este mai complexă comparativ cu cea a criteriului (1).

Conform rezultatelor privind ordonarea lucrărilor, se va apela îndeosebi la consecinţa 3 din articolul [6], care în această lucrare este descrisă ca afirmaţia 1, dar fără demonstraţie.

Afirmaţia 1 [6]. Fie că pentru oarecare două lucrări α şi β din cele *n* au loc relaţiile

$$\min(\tau_{j\alpha}; \tau_{j+1,\beta}) \le \min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\beta}),\ j = \overline{1, M-1}\ . \quad (2)$$

Totodată, în cazul că pentru un oarecare $v \in [2, M]$ are loc inegalitatea

$$\tau_{va} < \tau_{v\beta} \quad (3)$$

şi pentru un oarecare $k \in [2, v\text{-}1]$ are loc egalitatea

$$\tau_{k\alpha} = \tau_{k\beta}\ , \quad (4)$$

atunci are loc şi inegalitatea

$$\tau_{k\alpha} \ge \tau_{k-1,\alpha}\ . \quad (5)$$

În asemenea condiţii, la plasarea acestor lucrări alături în orar este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \to \beta$.

Folosirea condiţiilor (2)-(5) pentru ordonarea generală a lucrărilor este întemeiată doar dacă acestea sunt tranzitive. În articolul [6], această tranzitivitate este acceptată în baza extinderii tranzitivităţii similare privind condiţia (2) pentru problema 2*xn* demonstrate în [1] şi descrise, de asemenea, în [2, 3]. În afirmaţia 2, ce urmează mai jos, tranzitivitatea condiţiilor (2) este demonstrată şi, totodată, într-un mod diferit de cel folosit în [2, 3].

Afirmaţia 2. Condiţiile (2) sunt tranzitive, adică dacă au loc relaţiile (2) şi relaţiile

$$\min(\tau_{j\beta}; \tau_{j+1,\gamma}) \le \min(\tau_{j+1,\beta}; \tau_{j\gamma}),\ j = \overline{1, M-1}\ , \quad (6)$$

atunci au loc şi relaţiile

$$\min(\tau_{j\alpha}; \tau_{j+1,\gamma}) \le \min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\gamma}),\ j = \overline{1, M-1}\ . \quad (7)$$

Demonstraţie. În baza inegalităţilor (2) şi (6), obţinem

$$\begin{aligned} &\min(\tau_{j\alpha}; \tau_{j\beta}; \tau_{j+1,\beta}; \tau_{j+1,\gamma}) \le \\ &\le \min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\beta}; \tau_{j+1,\beta}; \tau_{j\gamma}),\ j = \overline{1, M-1}\ . \end{aligned} \quad (8)$$

Deoarece termenii $\tau_{j\beta}$ şi $\tau_j + 1, \beta$ sunt atât în partea dreaptă, cât şi în cea stângă a inegalităţilor (8), aceştia pot fi excluşi din partea dreaptă. De asemenea, în baza (2) termenul $\tau_{j\beta}$ nu poate fi mai mic decât $\tau_{j\alpha}$ şi $\tau_{j+1,\beta}$, deci nu poate fi unicul cel mai mic termen al părţii stângi a inegalităţilor (8) şi poate fi eliminat din partea stângă a relaţiilor (8). În mod similar, în baza (6) termenul $\tau_{j+1,\beta}$ nu poate fi mai mic decât $\tau_{j\beta}$ şi $\tau_{j+1,\gamma}$, deci nu poate fi unicul cel mai mic termen al părţii stângi a inegalităţilor (8) şi poate fi eliminat din partea stângă a relaţiilor (8). Astfel, inegalităţile (8) se reduc la relaţiile (7), ceea ce şi se cerea de demonstrat. Raţionamentele similare sunt şi mai simple în cazul în care inegalităţile (2), (6) şi (7) sunt stricte.

În cele ce urmează prin Ω = {1, 2, 3, ..., *n*} se va nota mulţimea tuturor lucrărilor ce se execută în sistem; se vor folosi, de asemenea, şi definiţiile privind lucrările monotone:

1. Se numesc *nedescrescătoare* (de tip *A*) acele din *n* lucrări pentru care au loc relaţiile

$$\tau_{ji} \le \tau_{j+1,i}, i \in A, j = \overline{1, M-1}, \quad (9)$$

aici *A* este mulţimea tuturor lucrărilor nedescrescătoare din cele *n* lucrări.

2. Se numesc *necrescătoare* (de tip *E*) acele din *n* lucrări pentru care au loc relaţiile

$$\tau_{ji} \ge \tau_{j+1,i}, i \in E, j = \overline{1, M-1}, \quad (10)$$

aici *E* este mulţimea tuturor lucrărilor necrescătoare din cele *n* lucrări.

3. Se numesc *constante* (de tip *C*) acele din *n* lucrări pentru care au loc relaţiile:

$$\tau_{ji} = \tau_i, i \in C, j = \overline{1, M}, \quad (11)$$

aici *C* este mulţimea tuturor lucrărilor constante din cele *n* lucrări. Din relaţiile (9) – (11) se poate uşor observa că

$$C \subseteq A, C \subseteq E. \quad (12)$$

3. Ordonarea lucrărilor constante, nedescrescătoare sau necrescătoare

Se cercetează cazurile în care toate sau o parte din cele *n* lucrări, în problema *Mxn,* aparţin mulţimilor *A* şi *E*, din care pot fi evidenţiate aparte, la necesitate, lucrările mulţimii *C*. Demonstraţia afirmaţiilor şi consecinţelor din această secţiune privind ordonarea lucrărilor plasate alături în orar este efectuată, de obicei, în baza confirmării satisfacerii condiţiilor (2)-(5) ale afirmaţiei 1. Conform descrierii, condiţiile (3)-(5) se satisfac atunci când pentru domeniul de definiţie conturat de relaţiile (3) şi (4) are loc relaţia (5); dacă domeniul de definiţie în cauză este vid, atunci nu se cere îndeplinirea relaţiei (5) şi se consideră că condiţiile (3)-(5) se satisfac.

Afirmaţia 3. La $\alpha \in A$, condiţiile (3)-(5) se satisfac.

Demonstraţie. Satisfacerea condiţiei (5) pentru orice $k = \overline{1, M-1}$ se confirmă de relaţiile (9), caracteristice prin definiţia lucrărilor ce aparţin mulţimii *A* şi care cuprind şi condiţia (5). Astfel, la $\alpha \in A$, indiferent dacă domeniul de definiţie conturat de relaţiile (3) şi (4) este vid sau nu, condiţiile (3)-(5) se satisfac, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Consecinţa 1. La $\alpha \in A$, condiţiile (2)-(5) sunt tranzitive.

Demonstraţie. Tranzitivitatea condiţiilor (2) nu depinde de tipul lucrărilor şi este argumentată în afirmaţia 2. În ce priveşte condiţiile (3)-(5), tranzitivitatea acestora la $\alpha \in A$ rezultă direct din afirmaţia 3, deoarece indiferent cu care tip de lucrare se compară o lucrare de tip *A* condiţiile (3)-(5) se satisfac. Deci, dacă condiţiile (3)-(5) au loc pentru perechea de lucrări {*α*, *β*} la $\alpha \to \beta$ şi, de asemenea, pentru perechea de lucrări {*β*, *γ*} la $\beta \to \gamma$, atunci ele au loc şi pentru perechea de lucrări {*α*, *γ*} la $\alpha \to \gamma$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Afirmaţia 4. Dacă

$$\tau_{j\alpha} = \tau_{j+1,\alpha}, \tau_{j\beta} = \tau_{j+1,\beta}, j = \overline{s,u}, \quad (13)$$

atunci submulţimea condiţiilor (2) pentru lucrările *α* şi *β* pe fragmentul de servoare [*s*; *u*] se satisface.

Demonstraţie. Submulţimea condiţiilor (2) pe fragmentul de servoare [*s*; *u*] este

$$\min(\tau_{j\alpha}; \tau_{j+1,\beta}) \le \min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\beta}), j = \overline{s,u}. \quad (14)$$

Totodată, în baza egalităţilor (13), au loc relaţiile

$$\min(\tau_{j\alpha}; \tau_{j+1,\beta}) = \min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\beta}), j = \overline{s,u}, \quad (15)$$

care satisfac condiţiile (14), ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Afirmaţia 5. Fie $L = \overline{i_l, i_{l+r-1}}$ şi $L \subseteq C$, atunci nu contează, în sensul (1), plasarea reciprocă a lucrărilor submulţimii *L* în orar pe locurile $\overline{l, l+r-1}$ – aceasta poate fi arbitrară.

Demonstraţie. Fie două lucrări $\alpha \in L$ şi $\beta \in L$ plasate alături în orar. Deoarece $\alpha \in L \subseteq C$ şi, totodată, conform (12) $C \subseteq A$, deci $\alpha \in A$ şi în baza afirmaţiei 5 condiţiile (3)-(5) se satisfac. De asemenea, au loc în formă de egalităţi şi condiţiile (2), deoarece prin definiţie (vezi (11)) pentru lucrările mulţimii *C* au loc egalităţile: $\tau_{j\alpha} = \tau_{j+1,\alpha}, j = \overline{1, M-1}$ şi $\tau_{j\beta} = \tau_{j+1,\beta}, j = \overline{1, M-1}$; aceasta semnifică lipsa de preferinţe, în sensul (1), între lucrările *α* şi *β* la plasarea acestora alături în orar.

În acelaşi timp, la $\alpha \in A$, conform consecinţei 1, condiţiile (2)-(5) ale afirmaţiei 1 sunt tranzitive; deci nu contează, în sensul (1), ordinea lucrărilor *α* şi *β* la plasarea acestora oriunde în orar pe locurile $\overline{l, l+r-1}$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Consecinţa 2. Dacă *C* = Ω, atunci nu contează, în sensul (1), plasarea reciprocă a tuturor lucrărilor în orar – aceasta poate fi arbitrară.

Veridicitatea consecinţei 2 rezultă direct din afirmaţia 5 la *l* = 1 şi *r* = *n*. Menţionăm că demonstraţia pentru cazul *C* = Ω poate fi efectuată şi în baza folosirii condiţiei suficiente de amplasare reciprocă optimă în orar a oricăror două lucrări – inegalităţile (22) din [6].

Afirmaţia 6. La *C* = Ω durata *T* de execuţie a celor n lucrări se calculează ca

$$T = (M-1)\max_{i=1,n} \tau_i + \sum_{i=1}^{n} \tau_i . \qquad (16)$$

Demonstrație. Deoarece în baza consecinței 2 valoarea lui T nu depinde de amplasarea celor n lucrări în orar, să cercetăm orarul în care lucrările sunt plasate în ordinea creşterii duratei de execuție τ_i pentru $i = \overline{1,n}$, adică:

$$\tau_{i_l} \le \tau_{i_{l+1}}, l = \overline{1,n-1}. \qquad (17)$$

Pentru un asemenea orar, fiecare din cele n lucrări, după începerea execuției, se prelucrează fără întreruperi de aşteptare a eliberării servoarelor $j = \overline{2,M}$. De aceea, încheierea execuției lucrării i_l are loc după intervalul de timp de la începerea execuției primei lucrări T_{i_l} ce se calculează ca

$$T_{i_l} = (M-1)\tau_{i_l} + \sum_{k=1}^{l} \tau_{i_k}, \quad l = \overline{1,n}. \qquad (18)$$

Este uşor să observăm că formula (18) la $l = n$ se transformă, luând în considerație relațiile (17), în formula (16), ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Pentru cazul $C = \Omega$ este uşor să determinăm orarul optim la folosirea ca criteriu de optimizare a duratei medii de încheiere a execuției unei lucrări. Soluția respectivă este dată de afirmația 7.

Afirmația 7. La $C = \Omega$, orarul optim, din punctul de vedere al duratei medii t_{med} de încheiere a execuției unei lucrări, se obține conform regulii: $\alpha<\beta$ (în caz de egalitate poate fi şi $\beta<\alpha$), dacă

$$\tau_{i_\alpha} \le \tau_{i_\beta}. \qquad (19)$$

Demonstrație. Luând în considerație expresia (18) pentru durata de încheiere a execuției unei lucrări, valoarea t_{med} se determină ca

$$t_{med} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} T_{i_r} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left[(M-1)\tau_{i_r} + \sum_{k=1}^{r}\tau_{i_k}\right] \qquad (20)$$

sau

-

$$t_{med} = \frac{M-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i + \frac{1}{n}\left[(n-\alpha+1)\tau_{i_\alpha} + (n-\beta+1)\tau_{i_\beta} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1,k\ne\alpha,k\ne\beta}^{r}\tau_{i_k}\right] =$$

$$= S + U + \frac{1}{n}\left[(n-\alpha+1)\tau_{i_\alpha} + (n-\beta+1)\tau_{i_\beta}\right], \text{ unde}$$

$$S = \frac{M-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i \text{ şi } U = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1,k\ne\alpha,k\ne\beta}^{r}\tau_{i_k}. \qquad (21)$$

Fie $\alpha=\beta-r$, $r>0$, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\alpha_2=\beta$ şi $\beta_2=\alpha$. Este oportun, în sensul $\min\{t_{med}\}$, ca lucrarea i_α să preceadă lucrării i_β, dacă

$$t_{med}(\alpha_1,\beta_1) \le t_{med}(\alpha_2,\beta_2) \qquad (22)$$

sau, luând în considerație (21),

$$S + U + \frac{1}{n}\left[(n-\alpha_1+1)\tau_{i_\alpha} + (n-\beta_1+1)\tau_{i_\beta}\right] \le \qquad (23)$$

$$\le S + U + \frac{1}{n}\left[(n-\alpha_2+1)\tau_{i_\alpha} + (n-\beta_2+1)\tau_{i_\beta}\right].$$

Din (23), după reducerea termenilor S şi U şi înmulțirea ambelor părți cu n, obținem

$$(n-\alpha_1+1)\tau_{i_\alpha} + (n-\beta_1+1)\tau_{i_\beta} \le \qquad (24)$$

$$\le (n-\alpha_2+1)\tau_{i_\alpha} + (n-\beta_2+1)\tau_{i_\beta}$$

sau

$$(\alpha_2-\alpha_1)\tau_{i_\alpha} \le (\beta_1-\beta_2)\tau_{i_\beta}, \qquad (25)$$

de unde, ținând cont că α_2-α_1=β_2-β_1=r, obținem inegalitatea evident tranzitivă (19), ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Consecința 3. La $C = \Omega$ şi orar optim, în sensul $\min\{t_{med}\}$, durata T_{i_l} a încheierii execuției lucrării i_l se calculează conform expresiei (18), iar durata medie t_{med} de încheiere a execuției unei lucrări se calculează conform expresiei (20).

Afirmația 8. La plasarea lucrărilor $\alpha \in A$ şi $\beta \in E$ alături în orar este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \to \beta$.

Demonstrație. Deoarece $\alpha \in A$, în baza afirmației 3, condițiile (3)-(5) se satisfac. De asemenea, ținând cont de relațiile (9), au loc inegalitățile $\tau_{j\alpha} \le \tau_{j+1,\alpha}, j = \overline{1,M-1}$, iar în baza relațiilor (10) au loc inegalitățile $\tau_{j+1,\beta} \le \tau_{j\beta}, j = \overline{1,M-1}$; deci pentru lucrările α şi β se satisfac şi condițiile (2). Astfel, condițiile (2)-(5) se îndestulează, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Afirmația 9. Fie $L=\overline{i_l, i_{l+r-1}}$, $L \subseteq (A \cup E) \subseteq \Omega$, atunci replasarea în orar a submulțimilor de lucrări de diferite categorii din L pe locurile $\overline{l, l+r-1}$ este oportună, în sensul (1), conform ordinii:

$$L \cap (A \setminus C) \to L \cap C \to L \cap (E \setminus C) \qquad (26)$$

sau

$$L \cap A \to L \cap (E \setminus C) \qquad (27)$$

sau

$$L \cap (A \setminus C) \to L \cap E. \qquad (28)$$

Demonstrație. Fie $\alpha \in (L \cap A)$ şi $\beta \in (L \cap E)$. În cadrul argumentării afirmației 8, ținând cont că $(L \cap A) \subseteq A$ şi $(L \cap E) \subseteq E$, este arătat că condițiile (2)-(5) pentru asemenea perechi de lucrări α şi β se satisfac. Totodată, deoarece $\alpha \in A$, în baza consecinței 1, condițiile (2)-(5) sunt tranzitive. Astfel, este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \to \beta$ în cadrul intervalului de locuri [l; $l+r$-1] ale orarului. De aici, luând în considerație că $(L \cap (A \setminus C)) \subseteq (L \cap A)$ şi $(L \cap (E \setminus C)) \subseteq (L \cap E)$, rezultă oportunitatea ordonării submulțimilor de lucrări de categoriile $L \cap A$ şi $L \cap (E \setminus C)$ în ordinea (27), adică $\alpha \to \beta$ unde $\alpha \in (L \cap A\}$ şi $\beta \in (L \cap (E \setminus C))$, precum şi a submulțimilor de lucrări de categoriile $L \cap (A \setminus C)$ şi $L \cap E$ în ordinea (28), adică $\alpha \to \beta$, unde $\alpha \in (L \cap (A \setminus C))$ şi $\beta \in (L \cap E)$.

Să cercetăm cazul (26). În ce priveşte ordonarea submulțimilor de lucrări de categoriile $L \cap (A \setminus C)$ şi $L \cap C$ în ordinea $L \cap (A \setminus C) \to L \cap C$, adică $\alpha \to \beta$ unde $\alpha \in (L \cap (A \setminus C))$ şi $\beta \in (L \cap C)$, condiţiile (3)-(5) se satisfac în baza afirmaţiei 3 şi luând în consideraţie că $\alpha \in (L \cap (A \setminus C)) \subseteq A$. Au loc, de asemenea, şi condiţiile (2), deoarece în baza (9) au loc inegalităţile $\tau_{j\alpha} \le \tau_{j+1,\alpha}, j = \overline{1, M-1}$, iar în baza (11) – egalităţile $\tau_{j+1,\beta} = \tau_{j\beta}, j = \overline{1, M-1}$. Astfel, condiţiile (2)-(5) pentru ordonarea $L \cap (A \setminus C) \rightarrow L \cap C$ se îndestulează.

Să demonstrăm că condiţiile (2)-(5) se îndestulează şi pentru ordonarea submulţimilor de lucrări de categoriile $L \cap C$ şi $L \cap (E \setminus C)$ în ordinea $L \cap C \rightarrow L \cap (E \setminus C)$. Fie $\alpha \in (L \cap C)$ şi $\beta \in (L \cap (E \setminus C))$. Deoarece $\alpha \in (L \cap C) \subseteq A$, în baza afirmaţiei 3 condiţiile (3)-(5) se satisfac. Au loc, de asemenea, şi condiţiile (2), deoarece în baza (11) $\tau_{j\alpha} = \tau_{j+1,\alpha}, j = \overline{1, M-1}$, iar în baza (10) $\tau_{j+1,\beta} \le \tau_{j\beta}, j = \overline{1, M-1}$. Astfel, condiţiile (2)-(5) pentru ordonarea $L \cap C \rightarrow L \cap (E \setminus C)$ se îndestulează.

Îmbinând cazurile $L \cap (A \setminus C) \rightarrow L \cap C$ şi $L \cap C \rightarrow L \cap (E \setminus C)$ şi ţinând cont, conform consecinţei 1, de tranzitivitatea condiţiilor (2)-(5) la $\alpha \in A$, veridicitatea cazului (26) este demonstrată.

***Consecinţa* 4.** La $A \cup E = \Omega$ este oportună, în sensul (1), plasarea în orar a submulţimilor de lucrări de diferite categorii conform ordinii: 1) *A\C → C → E\C* sau 2) *A → E\C*, sau 3) *A\C → E*.

Veridicitatea consecinţei 4 rezultă direct din afirmaţia 9 la $L = (A \cup E) = \Omega$, deoarece $L \cap A = A$, $L \cap C = C$, $L \cap E = E$, $L \cap (A \setminus C) = A \setminus C$ şi $L \cap (E \setminus C) = E \setminus C$.

Menţionăm că consecinţa 4 este o generalizare pentru problema de ordonare *Mxn* a algoritmilor A_2 şi A_3 referitoare la problema de ordonare 2*xn* din articolul [5].

Afirmaţia 10. Dacă $\alpha \in A$ şi

$$\tau_{j\alpha} \le \tau_{j\beta}, j = \overline{1, M-1}, \qquad (29)$$

atunci la plasarea lucrărilor *α* şi *β* alături în orar este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \rightarrow \beta$.

Demonstraţie. La $\alpha \in A$, conform afirmaţiei 4, condiţiile (3)-(5) se satisfac. În ce priveşte condiţiile (2), la $\alpha \in A$ şi ţinând cont de relaţiile (9) şi (29) acestea au loc de asemenea, deoarece: $\tau_{j+1,\alpha} \ge \tau_{j\alpha}, j = \overline{1, M-1}$ în baza relaţiilor (9) şi $\tau_{j\beta} \ge \tau_{j\alpha}, j = \overline{1, M-1}$ – relaţiile (29), deci $\min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\beta}) \ge \tau_{j\alpha}, j = \overline{1, M-1}$. Astfel, condiţiile (2)-(5) se îndestulează, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Domeniul de definiţie pentru lucrările de tip *β* ce satisfac condiţiile (29), în cazul unei lucrări concrete *α* de tip *A*, este grafic prezentat în figura 1.

***Consecinţa* 5.** Pentru ca o lucrare $\alpha \in A$ să fie preferabilă, în sensul (1), faţă de o oarecare lucrare *β*, la plasarea acestora alături în orar, este suficient ca $\beta \in E$ sau să se satisfacă condiţiile (29).

Veridicitatea consecinţei 5 se confirmă îmbinând afirmaţiile 9 şi 11.

***Consecinţa* 6.** Fie $L = \overline{i_l, i_{l+r-1}}$, $L \subseteq A$ şi pentru orice pereche de lucrări *α* şi *β* din *L* au loc relaţiile (29), atunci replasarea în orar a lucrărilor submulţimii *L* pe locurile $\overline{l, l+r-1}$ este oportună, în sensul (1), conform regulii: $\alpha \rightarrow \beta$, dacă au loc relaţiile

$$\tau_{1\alpha} \le \tau_{1\beta}. \qquad (30)$$

Demonstraţie. Este evident că, dacă se satisfac condiţiile (29), atunci se satisfac şi inegalităţile (30). În baza afirmaţiei 11, dacă au loc inegalităţile (29), este oportun, în sensul (1), de plasat lucrările *α* şi *β*

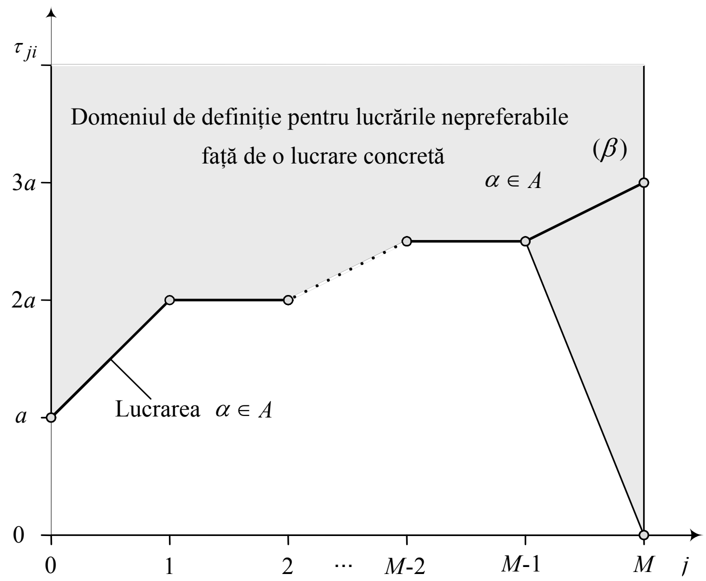

Figura 1. Domeniul de definiţie pentru lucrările nepreferabile (β) faţă de o lucrare concretă $\alpha \in A, \alpha \rightarrow \beta$

alături în orar astfel ca $\alpha \rightarrow \beta$. Totodată, este uşor de observat că condiţiile (29) sunt tranzitive, deci la plasarea lucrărilor *α* şi *β* oriunde în orar în cadrul intervalului [*l*; *l*+*r*-1] este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \rightarrow \beta$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Menţionăm că regula (30) coincide cu cea propusă în [5] pentru problema 2*xn* la lucrările de tip *A*.

Afirmaţia 11. Dacă $\beta \in E$ şi

$$\tau_{j+1,\alpha} \ge \tau_{j+1,\beta}, j = \overline{1, M-1}, \qquad (31)$$

atunci la plasarea lucrărilor *α* şi *β* alături în orar este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \rightarrow \beta$.

Demonstraţie. În baza inegalităţilor (31), se poate constata că domeniul de definiţie conturat de relaţiile (3) şi (4) este vid, deci condiţiile (3)-(5) se satisfac. În ce priveşte condiţiile (2), la $\beta \in E$ şi ţinând cont de relaţiile (10) şi (31), acestea au loc de asemenea, deoarece: $\tau_{j,\beta} \geq \tau_{j+1,\beta}, j = \overline{1, M-1}$ în baza relaţiilor (10) şi $\tau_{j+1,\alpha} \geq \tau_{j+1,\beta}, j = \overline{1, M-1}$ – relaţiile (31), de unde:

$$\min(\tau_{j+1,\alpha}; \tau_{j\beta}) \geq \tau_{j+1,\beta}, j = \overline{1, M-1}.$$

Astfel, condiţiile (2)-(5) se îndestulează, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Domeniul de definiţie pentru lucrările de tip α ce satisfac condiţiile (31), în cazul unei lucrări concrete β de tip E, este grafic prezentat în figura 2.

***Consecinţa* 7.** Pentru ca o lucrare $\beta \in E$ să nu fie preferabilă, în sensul (1), faţă de o oarecare lucrare α, la plasarea acestora alături în orar, este suficient ca $\alpha \in A$ sau să se satisfacă condiţiile (31).

Veridicitatea consecinţei 7 se confirmă îmbinând afirmaţiile 8 şi 11.

***Consecinţa* 8.** Fie $L = \overline{i_l, i_{l+r-1}}$, $L \subseteq E$ şi pentru orice pereche de lucrări α şi β din L au loc relaţiile (31), atunci replasarea în orar a lucrărilor submulţimii L pe locurile $\overline{l, l+r-1}$ este oportună, în sensul (1), conform regulii: $\alpha \rightarrow \beta$, dacă are loc relaţia

$$\tau_{M\alpha} \geq \tau_{M\beta}. \qquad (32)$$

Demonstraţie. Este evident că, dacă se satisfac condiţiile (31), atunci se satisfac şi inegalităţile (32). În baza afirmaţiei 11, dacă au loc inegalităţile (31), este oportun, în sensul (1), de plasat lucrările α şi β alături în orar astfel ca $\alpha \rightarrow \beta$. Totodată, este uşor de observat că condiţiile (31) sunt tranzitive, deci la plasarea lucrărilor α şi β oriunde în orar în cadrul intervalului [l; $l+r-1$] este oportun, în sensul (1), ca $\alpha \rightarrow \beta$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Menţionăm că regula (32) coincide cu cea propusă în [5] pentru problema $2xn$ la lucrări de tip E.

***Consecinţa* 9.** Fie $L = \overline{i_l, i_{l+r-1}}$, $L \subseteq (A \cup E) \subseteq \Omega$ şi pentru orice pereche de lucrări din submulţimea $L \cup A$ se satisfac condiţiile (29), iar pentru orice pereche de lucrări din submulţimea $L \cup E$ se satisfac condiţiile (31), atunci este oportună, în sensul (1), replasarea în orar pe locurile $\overline{l, l+r-1}$ a submulţimilor de lucrări de categoriile $L \cap (A \setminus C)$, $L \cap C$ şi $L \cap (E \setminus C)$ conform (26), iar a lucrărilor submulţimii $L \cap (A \setminus C)$ – conform (30), a lucrărilor submulţimii $L \cap C$ – în mod arbitrar, iar a lucrărilor submulţimii $L \cap (E \setminus C)$ – conform (32).

Justeţea consecinţei se confirmă direct din îmbinarea afirmaţiei 5 şi a consecinţelor 4, 6 şi 8.

Afirmaţia 12. Dacă $C \neq \Omega$, atunci, în caz general, plasarea reciprocă a lucrărilor constante în orar contează, în sensul (1).

Demonstraţie. Fie $A = \Omega$, $(\alpha, \beta) \in C$ şi pentru orice pereche de lucrări din A se satisfac condiţiile (29) în formă de inegalităţi stricte. De asemenea, fie că lucrările α şi β, fiind ordonate ca lucrări ale mulţimii A, sunt plasate în orarul optim în conformitate cu inegalităţile (30) pe locurile l şi $l+r-1$, $r > 0$, deci $\tau_\alpha = \tau_{i_l} < \tau_\beta = \tau_{i_{l+r-1}}$, iar orarului obţinut îi corespunde valoarea criteriului (1) egală cu T_1. La schimbarea cu locul în acest orar doar a lucrărilor α şi β, condiţiile de optim (30) nu se vor satisface, deoarece $\tau_\beta = \tau_{i_l} > \tau_\alpha = \tau_{i_{l+r-1}}$ şi de aceea se poate întâmpla ca noului orar să-i corespundă o valoare a criteriului (1) egală cu $T_2 > T_1$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

În contextul afirmaţiei 13, pot prezenta interes şi următoarele sugestii. Fie $A \cup E = \Omega$, $(\alpha, \beta) \in C$ şi pentru orice pereche de lucrări din A se satisfac condiţiile (29), iar pentru orice pereche de lucrări din E se satisfac condiţiile (31). Totodată, în baza (12), au loc relaţiile: $C \subseteq A$ şi $C \subseteq B$. În asemenea condiţii, dacă lucrările α şi β se ordonează ca lucrări ale mulţimii A, atunci se aplică regula (30), iar dacă acestea se ordonează ca lucrări ale mulţimii B, atunci se aplică regula (32), care diferă de (30) şi de aceea poate conduce la o altă soluţie, deşi cu aceeaşi valoare a criteriului T.

***Tabelul* 1**

Caracteristicile $\tau_{ji}, j = \overline{1,4}, i = \overline{1,4}$ ale lucrărilor pentru exemplul 1

Servoarele $j = \overline{1,4}$	**Lucrările** $i = \overline{1,4}$			
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	2	3	4	5
3	2	4	4	5
4	2	4	5	5

Exemplul 1. Fie un sistem din patru servoare ce execută patru lucrări cu caracteristicile prezentate în tabelul 1. Toate cele patru lucrări sunt de tip A. Orarul optim conform (30) se obţine la ordonarea lucrărilor în ordinea creşterii lui $i = \overline{1,4}$, iar $T_1 = 29$ unităţi. Constante (de tip C) sunt prima şi a patra lucrare. Dacă în orarul optim schimbăm cu locul doar cele două lucrări constante, pentru noul orar durata sumară de execuţie a lucrărilor va fi $T_2 = 31$ unităţi.

5. Concluzii

Pentru problema Mxn Bellman-Johnson, sunt obţinute reguli de ordonare a lucrărilor nedescrescătoare, constante şi necrescătoare la plasarea acestora alături în orarul ce poate conţine şi lucrări de alte categorii. Ordonarea parţială a lucrărilor permite reducerea calculelor, iar uneori şi îmbunătăţirea soluţiilor la determinarea orarelor cuazioptime. Pentru sistemul cu toate lucrările monotone, sunt elucidate cazuri şi propuse reguli de ordonare optimă, în sensul minimumului duratei sumare de prelucrare a tuturor lucrărilor. Este soluționată, de asemenea, problema ordonării lucrărilor constante pentru problema *Mxn*, la folosirea ca criteriu de optimizare a duratei medii de încheiere a execuției unei lucrări.

Referințe:

1. S.M.Johnson. *Optimal Two- and Three-Stage Production Schedules with Setup Times Included* // Naw. Res. Log. Quart. Vol. 1. nr. 1, 1954. – pp. 61-68.
2. R.W. Conway, W.L.Maxwell, L.W.Miller. *Theory of Scheduling*. – New York: Addison-Wesley, 1967.
3. V.S.Tanaev, V.V.Shcurba. *Introducere în teoria orarelor*. – Moscova: Ştiința, 1975 (rus.).
4. V.I. Burdiuc. *Cu privire la problema celor m strunguri (m ≥ 2)* // Cibernetica, nr. 3 (1969). – pp. 74-76 (rus.).
5. I.Bolun. *O modificare a algoritmului de ordonare Johnson* // Tezele comunicărilor seminarului republican „Sisteme şi mijloace de prelucrare integrată a informației", 17-18 iunie 1981. – Chişinău: 1981. – pp. 43-46 (rus.).
6. I.Bolun. *Cu privire la ordonarea lucrărilor în sisteme secvențiale* // Modele şi algoritmi în sistemele informatice de gestiune. – Chişinău: Ştiința, 1986. – pp. 29-58 (rus.).
7. I.Bolun. *Macrosinteza rețelelor de calculatoare*. – Chişinău: Editura ASEM, 1999.
8. I.M.Artamonov. *Cu privire la un algoritm de soluționare a problemei Bellman-Johnson* // Modele şi algoritmi de soluționare a problemelor de planificare şi dirijare. – Chişinău: Ştiința, 1982 (rus.).