GRUPURI TOPOLOGICE $G^{\square}$

***B.Țarălungă*[1], *T.Vieru*[2]**

[1]*Universitatea Pedagogică de Stat „I.Creangă”*, [2]*Univetsitatea Tehnică a Moldovei*

Adnotare: *Grupurile topologice cercetate în articol se consideră grupuri discrete. Se demonstrează dacă G este un grup Abelian, atunci grupul topologic $G^{\square}$ este un grup zero dimensional.*

Cuvinte cheie: *Grup topologic, ω -mărginit, zero dimensional, omeomorfe, aproape izomorfe.*

Grupul topologic Abelian $(G,+)$ se numește ω – mărginit, dacă pentru orice vecinătate V a elementului neutru există o mulțime numărabilă S de elemente, încât $G = V + S.$ Dacă (,) este un grup discret, atunci cu $G^{\square}$ se notează grupul (G ,) echipat cu ce mai fină topologie – mărginită. Grupurile cercetate se consideră grupuri discrete. Unele proprietăți ale grupului Abelian $G^{\square}$ sunt prezentate în [1-3].

Un grup topologic G se numește zero dimensional, dacă el posedă o bază din submulțimi deschise și închise. **.** Două grupuri G și H se numesc U - omeomorfe, dacă grupurile $G^{\square}$ și $H^{\square}$ sunt omeomorfe ca spații topologice. Se notează $G^{\square} \cong H^{\square}$.Grupurile G și H se numesc aproape izomorfe , dacă ele au subgrupuri de indice numărabil izomorfe.

Fie D un grup Abelian discret și divizibil cu card (D) $\leq \aleph_0$. Notăm cu H (G)= $=\{h: G \to D\}$ mulțimea morfismelor continue din G în D . Cum D este un grup cu a doua axiomă de numărabilitate, topologia din $G^{\square}$ este topologia indusă în grupul G de mulțimea H (G).

Teorema 1. Dacă G este un grup Abelian, atunci $G^{\square}$ este un grup zero dimensional.

Demonstratie . Fie h**:** $G^{\square} \to D$ un morfism continuu. Cum D este un grup discret, atunci orice submulțime L este deschisă și închisă. Atunci mulțimea $\{h^{-1}(L) : h \in H(G)\}$ este o bază formată din submulțimi deschise și închise pentru grupul $G^{\square}$. *Teorema este demonstrată* .

Teoremă 2. Dacă G este un grup Abelian infinit și numărabil, iar A și B sunt doua submulțimi deschise și închise în $G^{\square}$, = $\bigcup_t S_t$, B = $\bigcup_t L_t$, atunci există un omeomorfism f: $A \to B,$ încât pentru orice t restricția f_t este o translație a lui S_t pe L_t.

Demonstrație. Fie $A = \{a_1 , a_2, \dots, a_n, \dots\}$ și $B = \{b_1 , b_2, \dots, b_n, \dots\}$ două submulțimi deschise și închise în $G^{\square}$. Fie translația f_1 a lui n b_1 . Cum $G^{\square}$ este discret, iar A și B sunt deschise și închise există $a_1 \in S_1 \subset A$ și $b_1 \in L_1 \subset B$, încât $f_1(S_1) = L_1$. Atunci submulțimile $A_1 = A \setminus S_1$ și $B_1 = B \setminus L_1$ sunt deschise și închise.

Fie m_1 si r_1 indicii minimali pentru care $a_{m_1} \in A_1$ ș i $b_{r_1} \in B_1$. Alegem submulțimile deschise și închise $a_{m_1} \in S_2 \subset A_1$ și $b_{r_1} \in L_2 \subset B_1$, încât translația $x \to x + a_{m_1} - b_{r_1}$

aplică S_2 pe L_2. Analog alegem $S_3,\dots,S_t$,… și $L_3,\dots,L_t,\dots$, încât $\bigcup_{t=1}^{q} S_t$ conține a_1 ,…, a_q , iar $\bigcup_{t=1}^{q} L_t$ conține $b_1,\dots, b_q$. Astfel $A = \bigcup_t S_t$, $B = \bigcup_t L_t$. *Lema este demonstrată.*

Teoremă 3. Dacă G si K sunt doua grupuri Abeliene aproape izomorfe, atunci $G^{\square} \cong K^{\square}$.

Demonstrație. Dacă G este un grup Abelian numărabil infinit, iar K este un subgrup de indice numărabil în , atunci $K^{\square}$ este deschis în $G^{\square}$ [1]. După lema 2 $G^{\square} \cong K^{\square}$.

Fie acum G un grup nenumărabil. Există subgrupul D în K, încât grupul factor $\frac{G}{D}$ este un grup numărabil. Fie $\pi: G \to \frac{G}{D}$ - omomorfismul canonic. Atunci $\pi(K)$ are indice numărabil în grupul $\frac{G}{D}$. După lema 2 există partiția din submulțimi deschise și închise $\frac{G}{D} = \bigcup_t S_t$, $\pi(K) = \bigcup_t L_t$ și o mulțime de elemente s_t din $\frac{G}{D}$, încât translația $u_t: x \to x + s_t$ a grupuli $\frac{G}{D}$ aplică S_t pe L_t. Pentru orice t, fie $g_t \in G$, încât $\pi(g_t) = s_t$. Fie $N_t = \pi^{-1}(S_t)$ și . Atunci $G = \bigcup_t N_t$ și $K = \bigcup_t M_t$ sunt partiții din mulțimi deschise și închise. Fie $v_t: z \to z + g_t$ o translație a grupului Atunci $\pi \circ v_t = u_t \circ \pi$ și $v_t(N_1 t) = M_1 t$. Astfel familia $(v_1 t)$ definește omeomorfismul $f: G^{\square} \to K^{\square}$, încât restricția omeomorfismului f la N_t coincide cu v_t. *Teorema este demonstrată.*

Bibliografia

1. Lorenzo de Leo. Weak and strong topologies in topological Abelian groups. Memoria para optar al grado de doctor. Madrid, 2009.
2. B. Ţarălungă. Grupuri topologice real compacte. Probleme ale științelor socio-umane și modernizării învățămîntului. Ministerul Educației al Republicii Moldova. UPS "Ion Creangă". Conferința de totalizare a muncii științifice și științifico –didactice a corpului profesoral pentru anul 2012. Chişinau, 2013, Vol.I, p.387-389.
3. B. Ţarălungă. About Some Properties of the Group. The 22nd Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2014,18-21 september 2014 Bacău, Romania, Book of Abstracts, p.59.