FOLIUL LUI DESCARTES

Ecaterina VLASOVA

Departamentul Inginerie Civilă și Geodezie, gr. IGC-2203, Facultatea Construcții, Geodezie și Cadastru, Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Ecaterina Vlasova, vlasova.ekaterina.victorovna@gmail.com

Coordonator științific: Ion LEAH, conf., univ., dr., Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *The work has a synthesis character and is dedicated to the study of a remarkable line - the Descartes folium. This line is the first graph of an equation and was stated in 1638 by R. Descartes. In the paper, the loop in quadrant 1 is examined, the equation of the asymptote is deduced, the vertical tangent to the graph and local extreme points are found. The parametric equations and the equation of this line are obtained in polar coordinates. Finally, the drawing of Descartes' folium is sketched.*

Cuvinte cheie: *Graficul unei ecuaţii, ecuaţii parametrice, coordonate polare.*

La doar un an după elaborarea sistemului rectangular de coordonate, în 1638 Descartes își propune să examineze graficul unei ecuații: $x^3+y^3-3axy=0$.

Acest grafic este primul grafic al unei ecuații și a fost numit *Foliul lui Descartes*, în latină *foliu* însemnând frunză (de plantă, de copac). Este forma părții de grafic, situat în cadranul 1. Inițial, Descartes considera că întregul foliu constă din 4 asemenea părți – câte una în fiecare cadran. Abia în 1692 savantul olandez Cristian Huygens stabilește existența asimptotei acestei linii.

În cele ce urmează, vom studia forma foliului. Fără a restrânge generalitatea, vom considera $a=1$, ceea ce nu influențează esențial asupra formei acestei linii. Ecuația ia forma

$$x^3+y^3-3xy=0. \quad (1)$$

În primul rând, ecuația este simetrică în raport cu *x* și *y*; schimbând cu locurile aceste necunoscute, ecuația nu se schimbă. Astfel, foliul are o axă de simetrie – bisectoarea cadranelor $1-3$, dreapta $y=x$.

Pentru a afla punctele de intersecție ale foliului cu această dreaptă, în (1) se pune $y=x$: $x^3+x^3-3x^2=0$; $x^2(2x-3)=0$. Ecuația are două soluții: $x=0$ (soluție dublă) și $x=\frac{3}{2}$. Astfel, foliul intersectează această dreaptă în două puncte: $O(0,0)$ și $C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. Originea de coordonate este punct de autointersecție al foliului. În continuare, se stabilește ușor, că $x=0 \Leftrightarrow y=0$. Astfel, foliul intersectează axele de coordonate doar în origine.

Pornind de la afirmația lui Huygens despre existența asimptotei, vom alcătui ecuația ei. În cazul dat, asimptota poate fi doar oblică, deci să aibă ecuația $y=kx+b$. În cazul funcției explicite $y=f(x)$, constantele k și b se află din egalitățile $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$. În cazul foliului, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$. Prin împărțirea la x^3, din (1) se obține $1+\frac{y^3}{x^3}=3\frac{y}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{y^3}{x^3}\right)=3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x^2}=3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=3k\cdot 0=0.$ Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{y^3}{x^3}\right)=1+k^3$, rezultă $k=-1$. În continuare, $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}(y+x).$ Din (1) rezultă $(x+y)(x^2-xy+y^2)=3xy$, de unde, fără dificultate se află $b=-1.$

Astfel, $k=b=-1$ și asimptota este determinată de ecuația $y=-x-1$. În coordonate polare ecuația foliului capătă forma

$$\rho=\frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}\quad \text{sau}\quad \rho=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}\ . \tag{2}$$

Examinăm funcția ρ în cadranul 1. Pentru derivata ei, din (2) se obține

$$\rho'=\frac{3}{2}\cdot\frac{2\cos 2\theta(\sin^3\theta+\cos^3\theta)-3\sin 2\theta\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}{\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)^2}.$$

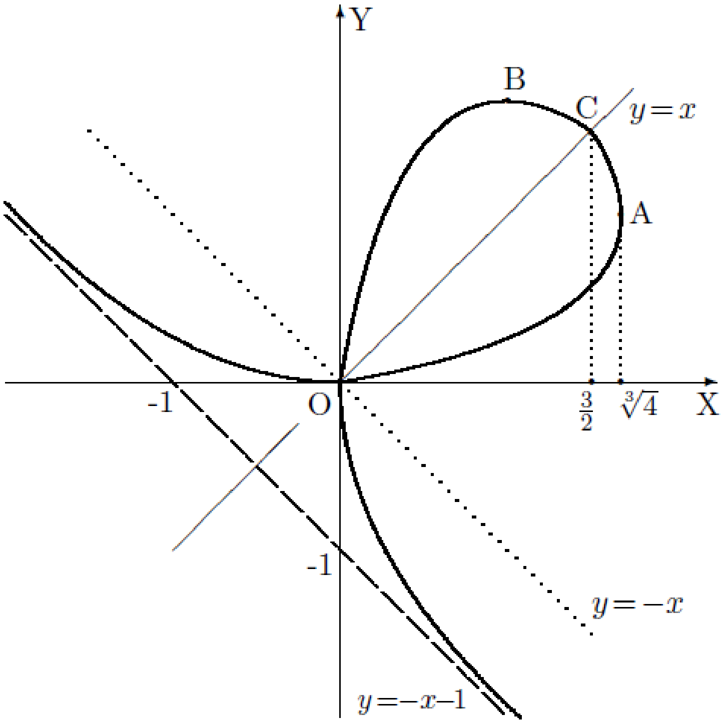
Dacă $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, atunci $\sin\theta-\cos\theta\le 0.$ Prin urmare, $\rho'\ge 0$ și funcția ρ este crescătoare. Valorile ei cresc de la $\rho=\rho(0)=0$ până la $\rho=\rho\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Cum foliul este simetric în raport cu bisectoarea cadranului 1, pentru $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ funcția ρ descrește de la $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ până la 0. Astfel, în cadranul 1 foliul este situat într-un sector de cerc cu raza $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ și mărginit de axele de coordonate. În cadranul 3 foliul nu are puncte. În cadranele 2 și 4 foliul e cuprins între asimptota $y=-x-1$ și bisectoarea cadranelor $2-4$, $y=-x$.

Pentru un studiu mai aprofundat al ecuației, este necesară aplicația derivatei. Aceasta se referă la punctele de extrem, la trasarea tangentelor. R. Descartes l-a rugat pe Pierre de Fermat să alcătuiască ecuațiile tangentelor verticale la foliu. Marele savant francez, unul dintre fondatorii calculului diferențial, a făcut cu ușurință acest lucru. Vom aplica derivarea funcției implicite pentru a afla tangentele verticale. Derivând, parte cu parte, ecuația (1) și ținând cont că *y* este funcție de *x*, se obține

$$3x^2+3y^2\cdot y'-3(1\cdot y+x\cdot y')=0\Rightarrow(y^2-x)y'=y-x^2\Rightarrow y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Pentru tangenta verticală panta nu există, prin urmare, nici y' nu este definit. Aceasta are loc pentru $y^2-x=0$, adică pentru $x=y^2$. Substituind x cu y^2, din (1) se obține $y=0$ și $y=\sqrt[3]{2}$.

Pentru $y=0$ se obține $x=0$; pentru $y=\sqrt[3]{2}$ se află $x=\sqrt[3]{4}$. Astfel, tangenta la grafic va fi verticală, dacă ea este trasată prin punctul $O(0,\,0)$ sau $A\left(\sqrt[3]{4},\,\sqrt[3]{2}\right)$. În baza simetriei graficului în raport cu dreapta $y=x$, punctul $B\left(\sqrt[3]{2},\,\sqrt[3]{4}\right)$ de asemenea se află pe grafic, iar tangenta, trasată prin acest punct, este orizontală. Astfel, punctul *B* este punct critic, chiar punct de maxim local.



Foliul lui Descartes poate fi determinat şi de ecuaţiile parametrice $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$, cu condiția evidentă $t \neq -1$. Aceste ecuații de asemenea se pot aplica la studiul foliului.

Bibliografie

1. Клетеник, Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М., Наука, 1967.
2. *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов.* Под ред. Б. П. Демидовича. М., Наука, 1963.