IMPLEMENTAREA NUMERICĂ A METODEI ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

Sergiu GALBINEAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În această lucrare se propune spre examinare construcția soluțiilor discontinue pentru calculul plăcilor Kirchhoff folosind metoda indirectă a elementelor de frontieră. Aceste soluții discontinue au fost obținute de către dr. hab. prof. univ. Gheorghe Moraru folosind transformarea generalizată Fourier. În baza acestor soluții a fost elaborat un program de calcul pentru plăcile de contur arbitrar cu condiții mixte de rezemare.*

Cuvinte cheie: *placă, soluții discontinue, metoda elementelor de frontieră, transformarea Fourier.*

1. Introducere

Una din cele mai utilizate metode numerice de calcul în diferite ramuri (mecanica corpului solid deformabil, mecanica fluidelor, magnetism, etc.) este metoda elementelor finite (MEF). Această metodă are un șir de avantaje față de alte metode: flexibilitate, simplitate în programare, este efectivă la rezolvarea problemelor nelineare etc. În acelaşi timp MEF este caracterizată prin unele dezavantaje, de exemplu, sisteme masive de ecuaţii, necesită memorie operativă foarte mare pentru a obţine exactitate suficientă, necesitatea unei vaste informaţii iniţiale etc.

În ultimul timp se dezvoltă intens metoda elementelor de frontieră (MEFr). Cele mai importante avantaje ale MEFr sunt: reducerea dimensiunii problemei cu o unitate, informaţie iniţială minimă, acurateţe sporită, efectivă pentru probleme cu concentratori de tensiuni (probleme de contact, mecanica fisurilor etc.).

Există două abordări de obţinere a ecuaţiilor integrale ale plăcilor: metoda directă şi indirectă. Metoda directă, bazată pe soluţii fundamentale, nu permite de a satisface totalitatea condiţiilor de frontieră posibile.

În această metoda se propune o abordare absolut nouă, bazată pe soluţii discontinue. Aceste soluţii, oferă posibilitatea de a formula ecuaţii sau sisteme de ecuaţii integrale pentru diferite condiţii de rezemare. Metoda permite de a ţine seama de comportarea soluţiilor în punctele singulare şi rezolvarea problemelor plăcilor cu defecte (fisuri, incluziuni elastice sau rigide etc.).

2. Soluțiile provenite din salturi concentrate într-o placă infinită

Să presupunem că într-o placă infinită există un defect (fisură, incluziune, etc.). Traversînd de la o margine a defectului la alta deplasarea verticală *w*, unghiul de rotire θ_1, momentul de încovoiere M_{11} și forța de forfecare generalizată V_1 pot avea salturi. Aceste salturi în sistemul local de coordonate $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ vor fi notate cu: $\langle\overline{w}\rangle$, $\langle\bar{\theta}_1\rangle$, $\langle\overline{M}_{11}\rangle$, $\langle\overline{V}_1\rangle$

Relațiile dintre deplasarea verticală *w*, unghiul de rotire θ_1, θ_2 și salturile deplasării verticale *w*, unghiului de rotire θ_1, momentului de încovoiere M_{11} și forța tăietoare generalizată V_1 în punctul x_2=0 pot fi scrise în următoarea formă[1]:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(x_2)\rangle \\ \langle \theta_1(x_2)\rangle \\ \langle M_{11}(x_2)\rangle \\ \langle V_1(x_2)\rangle \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Relațiile dintre eforturi și salturi:

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(x_2) \rangle \\ \langle \theta_1(x_2) \rangle \\ \langle M_{11}(x_2) \rangle \\ \langle V_1(x_2) \rangle \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Forţa tăietoare generalizată V_1 poate fi scrisă sub forma

$$V_1 = [l_1 \; l_2 \; l_3 \; l_4 \;] \left[\langle w(x_2) \rangle \quad \langle \theta_1(x_2) \rangle \quad \langle M_{11}(x_2) \rangle \quad \langle V_1(x_2) \rangle \right]^T , \tag{4}$$

Termenii $g_{ij}, t_{ij}, , l_j$ au fost obținuți cu ajutorul transformării generalizate Fourier și sînt dați în [1].

3. Eforturile în placa de contur arbitrar

Pentru a studia defectele pe un contur arbitrar sunt necesare formule de trecere de la un sistem de coordonate la altul.

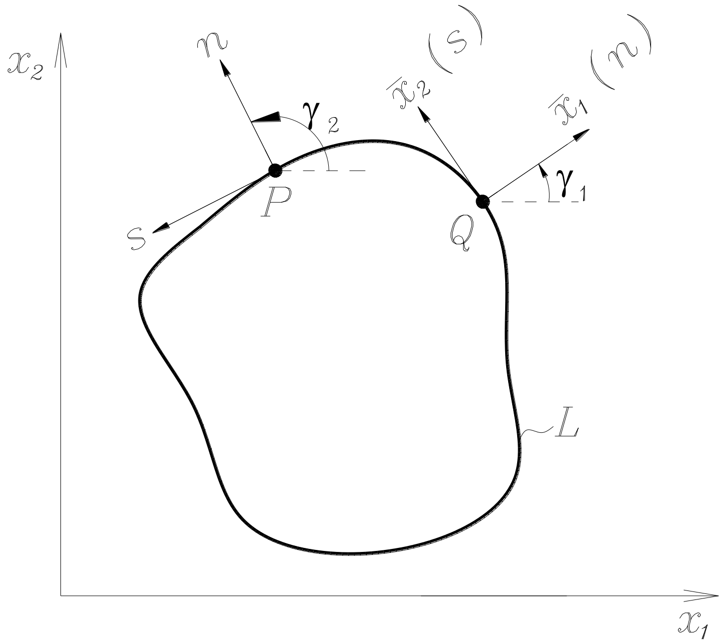

Fig. 1. Sistem de coordonate: local $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ și global (x_1, x_2).

Integrînd relațiile corespunzătoare putem scrie:

$$M_n^* = \int_L \bar{M}_{ij} n_i n_j ds_Q ; \qquad Q_n^* = \int_L \bar{Q}_i n_i ds_Q ; \qquad w^* = \int_L \bar{w}(P,Q) ds_Q ;$$
$$M_{nt}^* = \int_L \bar{M}_{ij} n_i m_j ds_Q ; \qquad \theta_n^* = -\int_L \bar{w}_{,i} n_i ds_Q ; \qquad V_n^* = Q_n^* + M_{nt,t}^* . \tag{5}$$

unde $n_1 = \cos\gamma$ și $n_2 = \sin\gamma$, $\gamma = (\gamma_1 - \gamma_2)$.

Pentru a obţine ecuaţiile integrale, starea de deformaţie a plăcii este prezentată ca suma a două stări. Prima (notată cu cerculeţ) provine de la sarcina exterioară. A doua (notată cu asterix) provine de la salturile concentrate pe linia L a defectului

$$\begin{aligned} w(P) &= w^o(P) + w^*(P), \qquad & \theta_n(P) &= \theta_n^o(P) + \theta_n^*(P), \\ M_n(P) &= M_n^o(P) + M_n^*(P), \qquad & V_n(P) &= V_n^o(P) + V_n^*(P). \end{aligned} \tag{6}$$

4. Aplicații

Să presupunem că avem o placă de contur arbitrar care are diferite condiții de frontieră. Folosind condițiile de frontieră putem scrie:

- pentru marginea simplu rezemată (L_1) $M_n^* + M_n^o = 0; \quad w^* + w^o = 0.$
- pentru marginea încastrată (L_2) $\theta_n^* + \theta_n^o = 0; \quad w^* + w^o = 0.$
- pentru marginea liberă (L_3) $M_n^* + M_n^o = 0; \quad V_n^* + V_n^o = 0.$

Sistemul global în formă matricială va căpăta forma:

$$\begin{bmatrix} [a_{ij}] & [b_{ij}] & [c_{ij}] & [d_{ij}] \\ [e_{ij}] & [f_{ij}] & [g_{ij}] & [h_{ij}] \\ [l_{ij}] & [l_{ij}] & [n_{ij}] & [p_{ij}] \\ [q_{ij}] & [r_{ij}] & [s_{ij}] & [t_{ij}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\langle w_i \rangle\} \\ \{\langle \theta_i \rangle\} \\ \{\langle M_i \rangle\} \\ \{\langle V_i \rangle\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{-w_i^F\} \\ \{-\theta_i^F\} \\ \{-M_i^F\} \\ \{-V_i^F\} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

unde:

$$a_{ij} = \int_{L_j} \bar{g}_{11}(P^i, Q) ds_Q; \quad w_i^F = -\sum_{j=1}^{ne} \int_{L_j} w_n^o\left(P^i, Q\right) ds_Q;$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (7) pot fi calculate deplasările și eforturile în orice punct din interiorul plăcii folosind relațiile (5) și (6), fiind exprimate prin salturile obținute din sistemul de ecuații (7).

Ca exemplu se va cerceta o placă pătrată, încastrată pe două laturi opuse iar celelalte două fiind simplu rezemate, solicitată la centru de o forță concentrată F (fig.3).

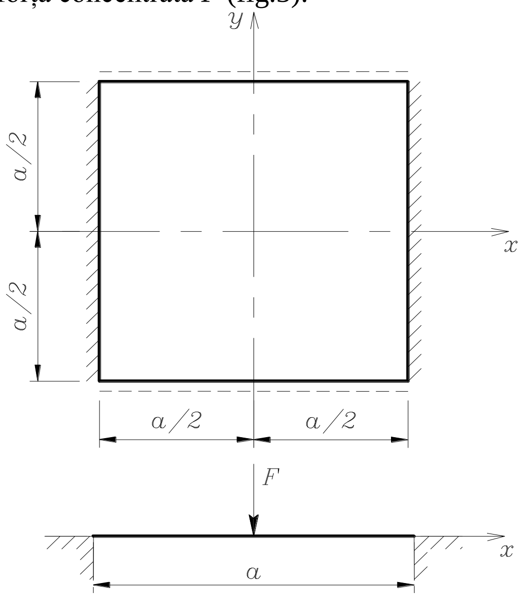

Fig. 3. Placă cu condiții mixte de rezemare.

Frontiera plăcii cercetate va fi discretizată în 20 de elemente constante. Rezultatele obținute se vor compara cu metoda elementelor finite (MEF) pentru o rețea de discretizare 10x10 elemente. Rezultatele obținute sînt illustrate în fig.4.

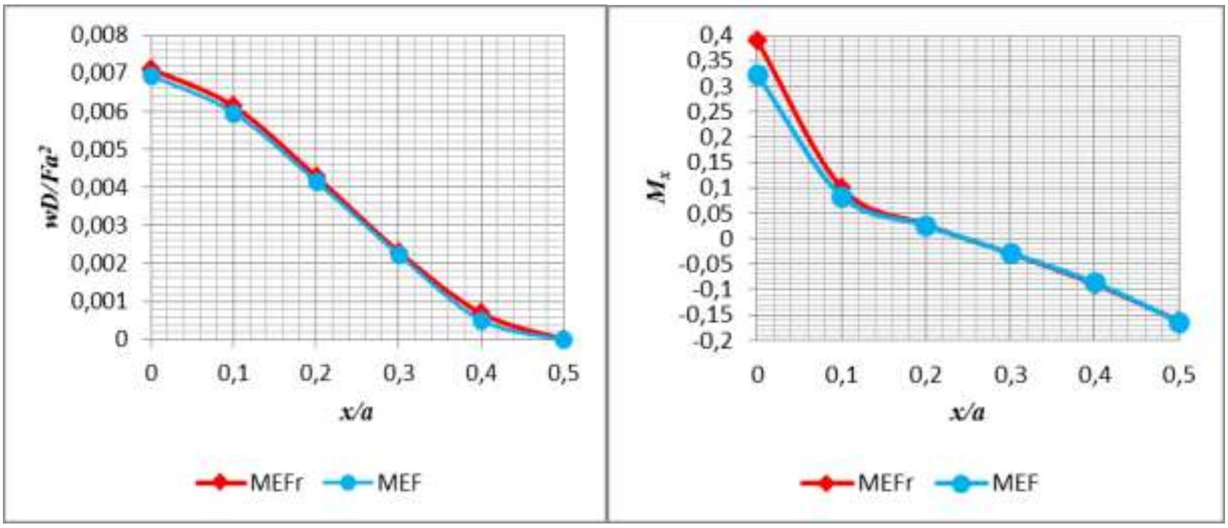

Fig. 4. Deplasarea verticală *w* și momentul de încovoiere M_x de-a lungul axei *x* .

Concluzii

- MEFr dă posibilitatea tratării problemei numai pe frontiera domeniului, astfel încît numai frontiera trebuie să fie discretizată , reducîndu-se în acest mod numărul de ecuații ale sistemului algebric rezultat.
- Programele MEFr necesită mai puține date de intrare și utilizează memorie operativă mai mică în comparație cu programele MEF.
- MEFr permite rezolvarea plăcilor de contur arbitrar cu diferite condiții de frontieră.
- MEFr permite rezolvarea problemelor plăcilor cu diferite defecte (fisuri, găuri, articulații plastice etc).

Mențiuni

Autorul dedică această lucrare în memoria conducătorului său științific dr. hab. prof. univ. Gheorghe Moraru.

Bibliografie

1. Морару Г.А. *Метод разрывных решений в механике деформируемых тел*. Штиинца, Кишинев, 1990.
2. Moraru Gh. *BEM based on discontinuous solutions in the theory of Kirchhohh plates on an elastic foundation.* ELSEVIER. Engineering Analysis with Boundary Elements 30 (2006) 382-390.
3. Katsikadelis, J.T; Armenakas, A.E. *A new boundary equation solution to the plate problem*. ASME Journal of Applied Mechanics 1989. 56: 364 –374 p.
4. Lazăr, I. *Metoda elementelor de frontieră în inginerie*. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.
5. Ventsel, E. S. *An indirect boundary element method for plate bending analysis*. Int. F. Numer. Methods Eng., 40(9), 1597-1610, 1997.