

DETERMINAREA CÎMPULUI DE TEMPERATURĂ ÎN BANDĂ CU CONDIȚII DE LIMITĂ DE TIP DIRICHLET

Autor: doctorand Ion CREȚU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: S-a determinat cîmpul interior de temperatură pentru banda $B \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, $x \equiv (x_1, x_2) \in B$, $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in B$ cu condiții de limită de tip Dirichlet. Pentru aceasta preventiv s-a construit funcția Green care verifică ecuația Poisson pentru acest domeniu, apoi s-a construit graficul funcției Green.

Pentru aplicare s-a analizat o bandă cu următoarele condiții: $-b \leq x_1 \leq +b, 0 \leq x_2 \leq a_2$, pe latura $x_2 = 0$ este aplicat un gradient de temperatură $T_{20} = \text{const}$ pe intervalul $c \leq x_1 \leq d, c < d < b$. Pe latura $x_2 = a_2$ un gradient de temperatură $T_{21} = \text{const}$ pe intervalul $f \leq x_1 \leq g, f < g < b$. Sursa interioară de căldură $F(\xi_1, \xi_2) = 0$. În final s-a construit graficul cîmpului interior de temperatură pentru acest domeniu.

Cuvinte cheie: cîmp interior de temperatură, funcția Green, condiții de limită Dirichlet, ecuația Poisson.

1. Formularea generală a problemei:

Să se determine cîmpul interior de temperatură pentru banda $B \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, (Fig.1), dacă în interiorul ei este aplicată o sursă de căldură $F(\xi_1, \xi_2)$, pe latura $x_2 = 0$ un gradient de temperatură $T_{20}(y_1, 0)$, iar pe latura $x_2 = a_2$ un gradient de temperatură $T_{21}(y_1, a_2)$.

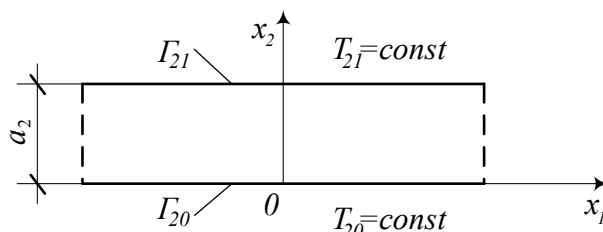


Fig.1. Schema unei benzi B

2. Rezolvare:

Pentru determinarea cîmpului interior de temperatură s-a folosit următoarea formulă integrală generală pentru domenii tridimensionale [5]:

$$\begin{aligned}
 T(x) = & a^{-1} \int_V F(\xi) G(x, \xi) dV(\xi) - \int_{\Gamma_D} T(y_0) \frac{\partial G(y_0, x)}{\partial n_0} d\Gamma_D(y_0) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0} G(y_0, x) d\Gamma_N(y_0) + \\
 & + a^{-1} \int_{\Gamma_M} \left[\alpha T(y_0) + a \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0} \right] G(y_0, x) d\Gamma_M(y_0). \tag{1}
 \end{aligned}$$

În relația (1) a este coeficientul de conductibilitate termică, α este coeficientul schimbului conectiv de căldură, $F(\xi)$ – sursa interioară de căldură a corpului, $T(y_0)$ – temperatura dată pe o suprafață Γ_D , $\frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0}$ – fluxul de căldură dat pe o suprafață Γ_N , iar $(\alpha T(y_0) + a \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0})$ este schimbul de căldură dintre suprafața Γ_M și mediul exterior, $G(y_0, x)$ este funcția Green, iar $\frac{\partial G(y_0, x)}{\partial n_0}$ este derivata pe normala exterioară a funcției Green. $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_M$ sunt condițiile de limită pe fiecare suprafață a corpului, respectiv:

- Γ_D – condiția de limită de tipul Dirichlet;
- Γ_N – condiția de limită de tipul Neumann;
- Γ_M – condiția de limită de tip mixt.

În cazul benzii B condițiile de limită sunt: pentru laturile $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2$ condiții de limită de tip Dirichlet (Γ_D). Pentru această bandă condiția de limită de tip Neumann $\Gamma_N = 0$ și condiția de limită de tip mixt $\Gamma_M = 0$. Conform formulării problemei, expresia (1) se va scrie în felul următor:

$$T(x_1, x_2) = a^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{a_2} F(\xi_1, \xi_2) G(x_1, \xi_1; x_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} T(y_1, 0) Q_{20}(y_1, x_1; 0, x_2) dy_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} T(y_1, a_2) Q_{21}(y_1, x_1; a_2, x_2) dy_1, \quad (2)$$

unde:

$$Q_{20}(y_1, x_1; 0, x_2) = \frac{\partial G(y_1, x_1, y_2, x_2)}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{1}{4\pi} \ln E_2 - \frac{1}{4\pi} \ln E \right); \quad (3)$$

$$Q_{21}(y_1, x_1; a_2, x_2) = \frac{\partial G(y_1, x_1, y_2, x_2)}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{1}{4\pi} \ln E_2 - \frac{1}{4\pi} \ln E \right).$$

În (2) s-a avut în vedere schimbarea semnului pentru a doua integrală, deoarece normala pe suprafața $x_2 = 0$ este contrar direcției axei de coordonate „ x_2 ”. Tot din aceeași relație se observă că pentru a determina câmpul interior de temperatură este necesar de a construi funcția Green care verifică ecuația Poisson pentru banda B .

2.1. Se construiește funcția Green care verifică ecuația Poisson:

$$\nabla^2 G(x, \xi) = -\delta(x - \xi), \quad (4)$$

pentru un domeniu în formă de banda B , cu următoarele condiții de limită de tip Dirichlet:

$$F_{20} \rightarrow G = 0; x_2 = 0; -\infty < x_1 < +\infty; \quad (5)$$

$$F_{21} \rightarrow G = 0; x_2 = a_2; -\infty < x_1 < +\infty.$$

Deoarece aceasta este o problemă pentru domenii nelimitate ($-\infty < x_1 < +\infty$), funcția Green $G(x, \xi)$ trebuie să ia o valoare finită la infinit:

$$G|_{x_1=\pm\infty} < \infty. \quad (6)$$

Conform surselor [1,2,3] construirea funcției Green pentru banda B de două dimensiuni ce verifică ecuația Poisson se reduce la construirea funcției Green de o dimensiune. Ulterior pentru construirea funcției Green pentru ecuații ordinare se va folosi algoritmul prezentat [1,2,3].

Conform [3] și răspunsul la problema 4.1 pag. 17 expresia finală a funcției Green în funcții elementare are următoarea formă:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{E_2}{E}, \quad (7)$$

unde funcțiile E_2, E se vor determina după următoarele expresii:

$$\begin{aligned} E_2 &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)}; \\ E &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

2.2. Construirea graficului funcției Green.

Folosind programa Maple 18 s-a construit graficul funcției Green (7) pentru bandă cu intervalul $-b \leq x_1 \leq +b, b = 10m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 10m$, dacă pe latura $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2, G = 0$. Punctul de aplicare a impulsului unitar are coordonatele $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 5m$.

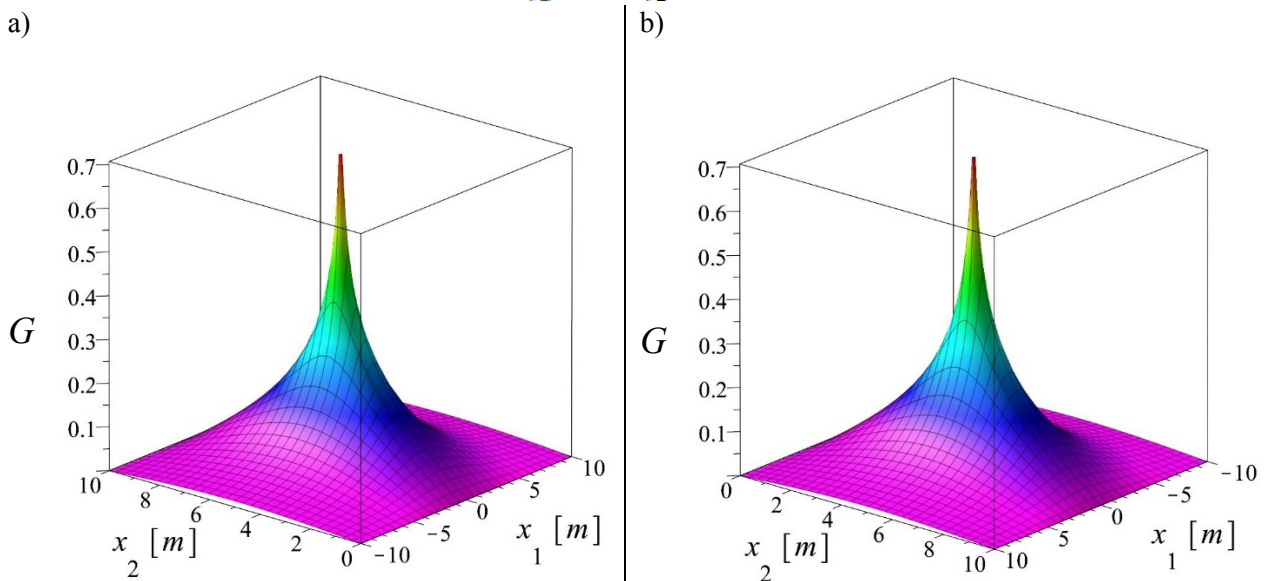


Fig.2 Graficul funcției Green pentru bandă cu condiții de limită de tip Dirichlet

Graficele din Fig.2 reprezintă aceeași funcție arătată din diferite părți, dacă le analizăm putem afirma:

- dacă punctul de aplicare cu coordonatele (ξ_1, ξ_2) va coincide cu punctul de răspuns cu coordonatele (x_1, x_2) , atunci funcția $G \rightarrow \infty$ în comparație cu celelalte mărimi. Aceasta se datorează expresiei “ $-\ln E$ ” din relația (7), și anume dacă x coincide cu ξ atunci “ $-\ln E = +\infty$ ”;
- se respectă condițiile de limită impuse inițial, cum se vede din Fig.2. a), $G = 0$ pentru $x_2 = 0$, și din Fig.2. b), $G = 0$ pentru $x_2 = a_2$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$ atunci $G = 0$;
- graficul este simetric în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_1 = 0m$ și respectiv în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_2 = 5m$.

3. Aplicarea funcției Green la determinarea câmpului interior de temperatură.

S-a determinat câmpul interior de temperatură, și s-a construit graficul pentru banda B cu intervalul $-b \leq x_1 \leq +b$, $b = 15m$, $0 \leq x_2 \leq a_2$, $a_2 = 10m$, dacă pe latura $x_2 = 0$ pe intervalul $c \leq x_1 \leq d$, $c = -7m$, $d = 1m$ acționează un gradient de temperatură $T_{20} = 80K$. Pe latura $x_2 = a_2$ pe intervalul $f \leq x_1 \leq g$, $f = -2m$, $g = 5m$ acționează un gradient de temperatură $T_{21} = 100K$. Sursa interioară de căldură este egală cu zero.

Folosind relația (2) și condițiile problemei enunțate mai sus rezultă: sursa interioară de căldură $F(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Astfel expresia (2) va căpăta următoarea formă:

$$T(x_1, x_2) = \int_c^d T(y_1, 0) Q_{20}(y_1, x_1; 0, x_2) dy_1 - \int_f^g T(y_1, a_2) Q_{21}(y_1, x_1; a_2, x_2) dy_1. \quad (9)$$

Pentru determinarea câmpului interior de temperatură se utilizează relația (9).

Se derivează funcția Green (7) pe normala exterioară la laturile $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2$ date în relația (3), apoi se substituie în expresia (9). Se simplifică termenii asemenea și se obține următoarea formulă integrală:

$$T(x_1, x_2) = \int_c^d T_{20} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}}{a_2 \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \cos \frac{\pi x_2}{a_2} + e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \right)} \right) dy_1 + \int_f^g T_{21} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}}{a_2 \left(1 + 2e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \cos \frac{\pi x_2}{a_2} + e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \right)} \right) dy_1. \quad (10)$$

Pentru a rezolva expresia (10) se va calcula în parte fiecare integrală:

$$T(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2). \quad (11)$$

Se rezolvă $T_1(x_1, x_2)$. Se scot constantele în afara integralei, pentru rezolvare se folosește sursa [4], se notează: $t^2 = e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1-x_1)}$ și $m = -2\cos \frac{\pi x_2}{a_2}$, și se obține integrala:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{a_2} \operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2} \cdot \frac{a_2}{\pi} \int_c^d \frac{dt}{1 + mt + t^2}. \quad (12)$$

Se rezolvă integrala (12) și se înlocuiesc notările făcute, se obține următoarea expresie:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}} \Big|_c^d. \quad (13)$$

Rezultatul final al integrării este:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(d-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(c-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}} \right]. \quad (14)$$

În mod analogic se rezolvă și $T_2(x_1, x_2)$, rezultatul final a acestei integrale va avea forma:

$$T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(g-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(f-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\operatorname{sn} \frac{\pi x_2}{a_2}} \right]. \quad (15)$$

În formă finală câmpul interior de temperatură se calculează cu următoarea expresie:

$$T(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(d-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(c-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \right] + \frac{T_{21}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(g-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(f-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \right]. \quad (16)$$

S-a folosit programa Maple 18 și s-a construit graficul câmpului interior de temperatură (16), unde s-a avut în vedere condițiile inițiale ale problemei.

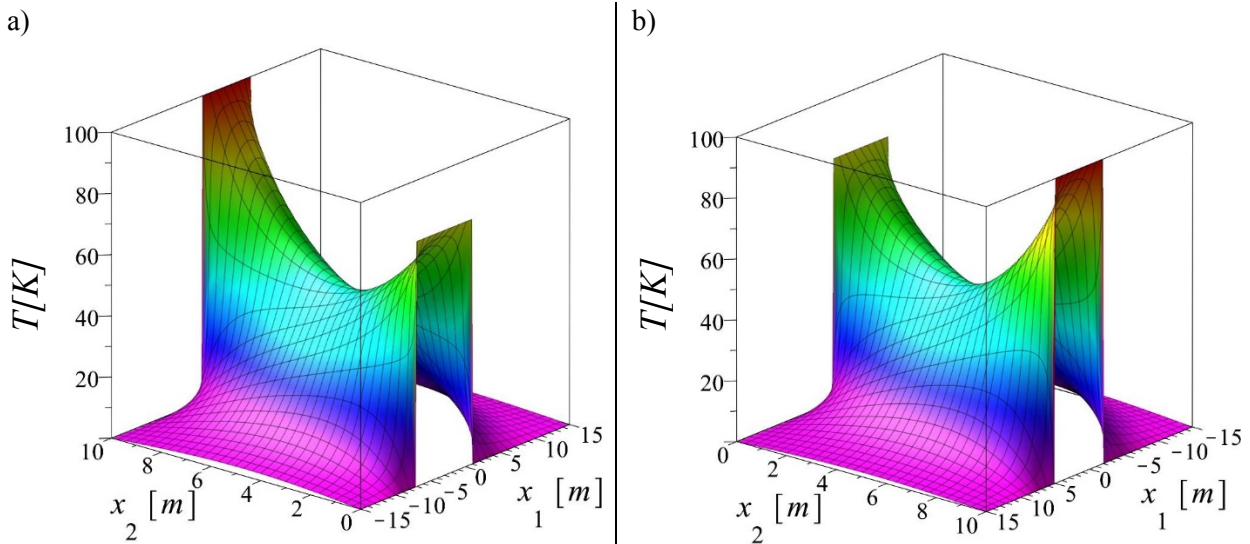


Fig.3 Graficul câmpului interior de temperatură pentru bandă

Graficele din Fig.3 reprezintă câmpul interior de temperatură pentru banda B arătat din diferite părți. Analizând aceste grafice putem afirma:

- programa nu a construit graficul în imediata apropiere a ordonatei $x_2 = 0$, din motiv că funcția nu este definită în acest punct. Se studiază asimptotica acestei funcții pentru a verifica condițiile de limită. Pentru aceasta s-a calculat limita funcției $T_1(x_1, x_2)$ când $x_2 \rightarrow 0$ din partea dreaptă, pe intervalul $c < x_1 < d$ și în afara acestui interval $d < x_1 < c$.

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2). \quad (17)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $c < x_1 < d$ când $x_2 \rightarrow 0$ din partea dreaptă :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty + \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty \right]; \quad (18)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = T_{20}. \quad (19)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $d < x_1 < c$ când $x_2 \rightarrow 0$ din partea dreaptă :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty - \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \infty \right]; \quad (20)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (21)$$

- programa nu a construit graficul nici în imediata apropiere a ordonatei $x_2 = a_2$, din motiv că funcția nu este definită nici în acest punct. Se studiază asimptotica acestei funcții pentru a verifica condițiile de limită. Pentru aceasta s-a calculat limita funcției $T_2(x_1, x_2)$ când $x_2 \rightarrow a_2$ din partea stîngă, pe intervalul $f < x_1 < g$ și în afara acestui interval $g < x_1 < f$.

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) \quad (22)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $f < x_1 < g$ când $x_2 \rightarrow a_2$ din partea stîngă :

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left[\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg\infty + \lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg\infty \right]; \quad (23)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = T_{21}. \quad (24)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $g < x_1 < f$ când $x_2 \rightarrow a_2$ din partea stîngă :

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left[\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg\infty - \lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg\infty \right]; \quad (25)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (26)$$

- se respectă condițiile de limită impuse inițial, pentru latura $x_2 = 0$ cum se vede din Fig.3 a) și (19) $\rightarrow T_1(x_1, x_2) = T_{20} = 80K$ pentru $c < x_1 < d$, iar din expresia (21) $\rightarrow T_1(x_1, x_2) = 0$ pentru intervalul $d < x_1 < c$. Pentru latura $x_2 = a_2$, cum se vede din Fig.3 b) și (24) $\rightarrow T_2(x_1, x_2) = T_{21} = 100K$ pentru $f < x_1 < g$, iar din (26) $\rightarrow T_2(x_1, x_2) = 0$ pentru intervalul $g < x_1 < f$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$ atunci $T_2(x_1, x_2) = 0$;

- deoarece gradientele de temperatură T_{20} și T_{21} sunt aplicate pe diferite intervale ale laturilor benzii, graficul funcției este asimetric. Dacă s-ar fi construit graficul de la un singur gradient de temperatură aplicat pe o latură sau de la două gradientele aplicate pe același interval dar pe laturi diferite atunci el ar fi fost simetric în raport cu planul care trece prin mijlocul intervalului.

Concluzii:

1. Relația cîmpului interior de temperatură (16) poate fi folosită pentru determinarea cîmpului de temperatură pentru bandă cu orice dimensiuni și valoare a gradientului de temperatură care acționează pe un anumit interval pe laturile $x_2 = 0$ și/sau $x_2 = a_2$. Dacă temperatura nu va fi o constantă ci o funcție, atunci va fi necesar de calculat din nou integrala (9).
2. Cîmpul interior de temperatură deja determinat poate fi folosit în domeniul termoelasticității la determinarea deplasărilor și tensiunilor termice în bandă.

Bibliografie:

1. Șeremet Victor. *Funcții de influență în termoelasticitatea staționară*. Chișinău, 2003, 308p.
2. Șeremet Victor. *Funcții Green pentru ecuația Poisson*. Chișinău, 2003, 242p.
3. Șeremet Victor, Bonnet Guy. *Encyclopedia of domain Green's functions*. Chișinău, 2008, 220p.
4. Выгодский М. Я. *Справочник по высшей математике*. Москва: Астрель•АСТ, 2006, 992с.
5. Каргашов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. М.: Высш. шк., 1985, 480с.