Relaxarea semidefinită în optimizarea pătratică cu variabile binare

Vasile MORARU
Universitaea Tehnică a Moldovei
moraru@mail.utm.md

***Abstract* — Lucrarea de faţă abordează cu ajutorul funcţiei Lagrange şi a programării semidefinite problema de programare pătratică cu restricţii pătratice în variabile binare. Problema de programare pătratică cu restricţii pătratice se reduce la o inegalitate matriceală în spaţiul matricelor semidefinite, care poate fi rezolvată cu ajutorul metodelor de punct interior.**

***Cuvinte cheie*: optimizare pătrarică, restricţii pătratice, programare semidefinită, funcţia Lagrange, inegalitatăţi matriceale, metode de punct interior.**

I. INTRODUCERE

În lucrarea de faţă ne interesăm de problema de programare pătratică cu restricţii pătratice şi cu variabile binare:

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x) = x^T A_0 x \to \min \\ f_i(x) = x^T A_i x - b_i = 0, i = 1,2,\dots,m, \\ x_i \in \{-1,1\}^n, i = 1,2,\dots,n. \end{array}\right\} \tag{1}$$

unde $A_i = A_i^T \in \Re^{n\times n}$, $b_i \in \Re, \forall i$, $x \in \Re^n$.

Această problemă are numeroase aplicaţii în inginerie, în particular se întâlneşte în optimizarea combinatorială (problema bisecţiei maxime a unui graf, problema s-t MAX-CUT, problema colorării grafului ş.a.[1]). Este cunoscut că problema considerată este o problemă NP-completă [2].

În lucrare problema de programare pătratică (1) cu restricţii pătratice, dată în spaţiul vectorial $\Re^n$ se reduce la rezolvarea unei inegalităţi matriceale în spaţiul matricelor semidefinite de dimensiune $n \times n$.

II. RELAXAREA SEMIDEFINITĂ

Asociem problemei (1) funcţia Lagrange

$$L(x,u,v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) + \sum_{i=1}^n v_i\left(x_i^2 - 1\right) =$$
$$= x^T\left(A_0 + Diag(v) + \sum_{i=1}^m u_i A_i\right)x - b^T u - e^T v,$$

unde

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \Re^n, u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \Re^m$,

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \Re^m, e = (e_1, e_2, \dots, e_m)^T \in \Re^m$, iar $Diag(v)$ este matricea diagonală, având pe diagonala principală componentele vectorului *v*.

Notăm $\varphi(u,v) = \inf_{x\in\Re^n} L(x,u,v)$.

Avem

$$\varphi(u,v) > -\infty,$$

dacă şi numai dacă următoarele două condiţii au loc:

$$A_0 + Diag(v) + \sum_{i=1}^m u_i A_i \succ= 0$$

$$\nabla_x L(x,u,v) = 2\left(A_0 + Diag(v) + \sum_{i=1}^m u_i A_i\right)x = 0 \tag{2}$$

Aici şi în continuare notaţia "$A \succ= 0$" înseamnă că $A = A^T$ şi că această matrice simetrică este pozitiv semidefinită, adică

$$z^T Az \ge 0 \text{ pentru orice } z \in \Re^n.$$

Observăm că soluţia optimă duală se află pe frontiera domeniului de admisibilitate pentru problema duală: $\sup_{u,v} \varphi(u,v)$, adică

$$\det\left(A_0 + Diag(v) + \sum_{i=1}^m u_i A_i\right) = 0.$$

Pentru orice soluţie admisibilă *x* avem

$$[Diag(x)]^2 = Diag(x) \times Diag(x) = I$$

şi vectorul

$$v = -Diag(x)A_0 x - Diag(x)\left(\sum_{i=1}^m u_i A_i\right)x$$

verifică relația (2) pentru un oarecare $u \in \Re^m$. Aici *Diag(x)* este matricea diagonală pentru $x \in \Re^n$.

Se constată imediat:

$$-e^T v = x^T A_0 x + x^T \left(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i \right) x,$$

de unde rezultă că

$$\min\{f_0(x) : f_i(x) = b_i, \forall i, x_k^2 = 1, \forall k\} =$$

$$= \max\{\varphi(u,v) : A_0 - Diag(Diag(x) \times M(u,x))\}.$$

Mai sus şi in continuare s-a notat:

$$M(u,x) = \left[A_0 x + \left(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i \right) x \right].$$

Prin urmare, dacă $x^* \in \Re^n$ este un punct admisibil şi există un $u \in \Re^m$ care rezolvă inegalitatea matriceală

$$A_0 - Diag(Diag(x^*) \times M(u, x^*)) + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i \succ= 0$$

atunci x^* este o soluție optimă globală pentru problema (1) (așa cum $\varphi(u,v)$ este o funcție concavă şi valorile funcțiilor obiectiv din problema primală şi problema duală coincid).

III. CONCLUZII

Astfel problema de programare pătratică cu restricții pătratice (1) poate fi reformulată ca o inegalitate matriceală. Pentru rezolvarea inegalităților matriceale pot fi folosite metodele de punct interior [3-4] , care la ora actuală constituie un aparat matematic evoluat, având complexitatea polinomială.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bertsimas D., Ye Y. Semidefinite relaxations, multivariate normal distributions and order statistics. Working Paper, Department of Management Science, The University of Iowa,1997..

[2] Murty K. G. Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming. Mathematical Programming, 39: 117-129, 1987.

[3] Nesterov Y. E., Nemirovski A. S. Interior point polinomial algorithms in convex programming. SIAM Publications, 1993.

[4] Andrei N. Programare semidefinită. Matrix Rom, Bucureşti, 2001.