



UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI



Digitally signed by Technical  
Scientific Library, TUM  
Reason: I attest to the  
accuracy and integrity of this  
document

**Elena COJUHARI**

# **CALCULUL OPERAȚIONAL ȘI APLICAȚII**

**Chișinău  
2024**

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI  
FACULTATEA INGINERIE MECANICĂ,  
INDUSTRIALĂ ȘI TRANSPORTURI  
DEPARTAMENTUL MATEMATICA

Elena Cojuhari

CALCUL OPERAȚIONAL ȘI  
APLICAȚII

*Manual*

Chișinău  
Editura "Tehnica-UTM"  
2024

**CZU 517.4(075.8)**

**C 61**

Manualul a fost discutat și aprobat pentru editare la ședința Senatului UTM din 19.12.2023, proces verbal nr. 6.

Manualul este destinat studenților care studiază cursul de matematică superioară, conține material teoretic și exemple de rezolvare a problemelor în calculul operațional - o secțiune de matematică superioară inclusă în standardul obligatoriu de învățământ pentru studenții specialităților inginerie radio, inginerie electrică și inginerie termică, de asemenea, poate fi folosit și de studenții la fizică tehnică și matematică aplicată. Manualul se încheie cu o serie de exerciții și probleme de control pe care studenții ar trebui să le rezolve pentru a verifica stăpânirea materialului prezentat.

Autor: conf. univ., dr. Elena Cojuhari

Recenzenți: conf. univ., dr. Victor Cernii, UTM  
prof. univ., dr. hab. Liubomir Chiriac, UPS

**DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN RM**

**Cojuhari, Elena.**

Calcul operațional și aplicații: Manual / Elena Cojuhari  
Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea Inginerie Mecanică,  
Industrială și Transporturi, Departamentul Matematica.

– Chișinău: Tehnica-UTM, 2024. – 125 p.: fig.

Bibliogr.: p. 123 (8 tit.). – Index: p. 124-125. – 100 ex.

Redactor E.Balan

---

Bun de tipar 15.01.24

Formatul hârtiei 60x84 1/16

Hârtie ofset. Tipar RISO

Comanda nr. 10

---

MD-2004, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168, UTM  
MD-2045, Chișinău, str. Studenților, 9/9, Editura „Tehnica-UTM”

**ISBN 978-9975-64-383-2.**

**© UTM, 2024**

# CUPRINS

Introducere . . . . .	4
1. Transformarea Laplace . . . . .	6
1.1. Spațiul funcțiilor original. Transformata Laplace . . . . .	6
1.2. Transformarea Laplace inversă. Formula Mellin-Fourier . . . . .	13
1.3. Proprietăți ale transformării Laplace . . . . .	19
1.4. Operația de convoluție. Teoreme de multiplicare . . . . .	45
1.5. Teoreme de dezvoltare . . . . .	51
2. Aplicații ale transformării Laplace . . . . .	68
2.1. Integrarea ecuațiilor diferențiale . . . . .	68
2.2. Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale . . . . .	85
2.3. Aplicarea transformării Laplace la rezolvarea ecuațiilor integrale . . . . .	92
2.4. Rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații integro- diferențiale . . . . .	100
2.5. Aplicarea calcului operațional în studiul circuitelor electrice . . . . .	103
3. Exerciții și probleme . . . . .	109
Bibliografie . . . . .	123
Index . . . . .	124

---

## Introducere

Apariția calculului operațional ca ramură independentă a matematicii datează de la sfârșitul secolului al XIX-lea, deși originile calculului operațional erau deja conturate în lucrările clasice ale matematicienilor remarcabili G. Leibniz, D. Bernoulli, L. Euler, J. Lagrange, J. Fourier, S. Poisson, A. Cauchy.

Calculul operațional reprezintă o tehnică prin care problemele de analiză sunt transformate în probleme algebrice considerabil mai simple în special, ecuațiile diferențiale ordinare, precum și unele ecuații integrale, sunt transformate în ecuații algebrice.

Ghidată în mare măsură de intuiție și de bogatele cunoștințe de fizică bazate în special pe studiile sale în domeniul telegrafiei, această tehnică a fost dezvoltată de fizicianul-matematician Oliver Heaviside (1850-1925), punând bazele calculului operațional atribuit acum numelui său. O justificare matematică riguroasă a metodelor operaționale ale lui Heaviside a venit abia după lucrările lui Th. Bromwich (1875-1929) care au înrudit calculul operațional cu transformarea Laplace, apoi, cu merit de menționat, justificarea făcută de Norbert Wiener (1894-1964) în cadrul metodelor bazate pe proprietățile transformării Fourier.

Metodele de calcul operațional, făcând parte din cele mai eficiente metode ale analizei matematice aplicate, care în majoritatea cazurilor fac posibilă, prin reguli simple, rezolvarea multor probleme suficient de complicate din diverse domenii ale științelor naturale moderne. Aceste metode găsesc aplicații de succes în fizica matematică, în teoria ecuațiilor diferențiale, teoria ecuațiilor integrale, teoria funcțiilor speciale, precum și în multe alte domenii înrudite. Metodele operaționale au o importanță deosebită în diverse domenii ale științelor naturale, tehnologie, de exemplu, automatizare și telemecanică, teoria sistemelor și optimizare, sunt utilizate pe scară largă în rezolvarea problemelor din mecanică, inginerie electrică, inginerie radio, transfer de căldură etc.

Manualul de față oferă informații teoretice asupra calculului operațional și aplicații, sunt analizate în detaliu soluții de probleme care ilustrează aplicarea metodelor calculului operațional. De asemenea, sunt date exemple de aplicare a metodelor operaționale la rezolvarea ecuațiilor diferențiale, ecuațiilor integrale, ecuațiilor și sistemelor de ecuații integro-diferențiale, precum în studiul circuitelor electrice etc.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Boboc N. *Funcții complexe*. București: Ed. Didactică și Pedagogică, 1969.
- [2] Chițescu I., Cristescu R., Grigore Gh., Gussi G., Halanay A., Turchescu M., Marcus S. Coordonator Cristescu R. *Dicționar de analiză matematică*. București: Editura Științifică și Enciclopedică, 1989.
- [3] Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Integral Transforms and Operational Calculus, Pure and Applied Mathematics, Volume 78*, Oxford: Pergamon Press, 1965.
- [4] Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operational calculus*, Itogi Nauki. Ser. Mathematics. Mat. anal. 1964, 1966, 7–75.
- [5] Fihtenholt G. M. *Curs de calcul diferențial și integral. Vol. II*. București: Editura Tehnică, 1964.
- [6] Fihtenholt G. M. *Curs de calcul diferențial și integral. Vol. III*. București: Editura Tehnică, 1965.
- [7] Mayer O. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă. Vol. 1*. București: Ed. Academiei Române, 1981.
- [8] Privalov I. *Introducere în teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Chișinău: Ed. Lumina, 1989.