UNELE PROPRIETĂȚI ALE APLICAȚIILOR MULTIVALORICE CU VALORI DECOMPOSABILE ÎN SPAȚIILE $L^1cc\left(I, convR^m, \lambda\right)$

Vladimir DRAGAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În baza noțiunii de decomposabilitate introdusă în [1], se studiază proprietățile mulțimilor stocastice decomposabile generate de aplicații măsurabile definite pe spațiul produs* $\Omega \times [a,b]$, *unde* (Ω, U, P) - spațiu probabilistic complet.

Cuvinte cheie: *aplicație multivalorică, măsurabilă, decomposabilă, integral mărginită, metrica Hausdorff.*

Pentru spațiul metric (L,d), $x \in L$ și $A \subset L$ notăm $\rho(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$. Cu $B(L)$ vom nota σ - algebra Borel pe L. Fie $\left(X, \|\cdot\|\right)$ spațiul Banach separabil, (Ω, U, P) spațiu probabilistic complet. Cu $U \times B(X)$ vom nota σ - algebra pe $\Omega \times L$; cu $Cl(L)$ vom nota familia tuturor submulțimilor nevide închise din L, $I = [a,b]$ segment de dreaptă dotat cu σ - algebra Lebesque T și măsura λ.

Fie $\left(R^m, \|\cdot\|\right)$ spațiul euclidian m - dimensional, $\left(convR^m, h\right)$ spațiul submulțimilor compacte convexe din R^m dotat cu metrice Hausdorff h. Notăm cu $C\left(R^m\right)$ spațiul tuturor mulțimilor nevide compacte convexe din $convR^m$ dotat cu metrica $d[2]$:

$$d(A,B) = \max\left\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} h(a,b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} h(a,b)\right\},\ a,b \in convR^m.$$

Fie $L^1cc\left(I, convR^m, \lambda\right)$ - spațiul aplicațiilor multivalorice $F : I \to convR^m$ măsurabile și integral mărginite dotat cu metrica □$(\cdot,\cdot)$.

$$□\left(F_1, F_2\right) = \int_I h\left(F_1(t), F_2(t)\right) dt.$$

Se știe că spațiul metric $L^1cc\left(I, convR^m, □\right)$ este complet și separabil [1].

Definiție $[1]$. Mulțimea $M \subset L^1cc\left(\Omega, convR^m, P\right)$ este decomposabilă (în raport cu U), dacă pentru orice mulțime $A \in U$ și orice $G, F \in M$,

$$\chi_A \cdot F + \chi_{\Omega - A} \cdot G \in M.$$

Fie D familia tuturor mulțimilor nevide inchise și decomposabile din spațiul $L^1cc\left(I, convR^m, \lambda\right)$.

Fie $F : \Omega \times I \to C\left(R^m\right)$ o aplicație multivalorică $(U \times I)$- măsurabila și fie că aplicația multivalorică $\Phi_F : \Omega \to 2^{L^1cc\left(I, convR^m, \lambda\right)}$ este definită prin formula

$$\Phi_F(\omega)=\left\{F\in L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)\middle|F(t)\in F(\omega,t)\,a.p.\hat{\imath}n\,I\right\},\quad \omega\in\Omega. \tag{1}$$

Următoarele teoreme stabilesc unele proprietăți ale aplicației multivalorice $\omega\to\Phi_F(\omega)$ generată de aplicația $F::\Omega\times I\to C\left(R^n\right)$.

Teorema 1. Aplicația $\omega\to\Phi_F(\omega)$ este măsurabilă şi aplică Ω în D atunci şi numai atunci cînd există o aplicație măsurabilă $\beta:\Omega\to L^1\left(I,R^1,\lambda\right)$, astfel încît pentru fiecare $\omega\in\Omega$.

$$d\left(\{0\},F(\omega,t)\right)\le\beta(\omega)(t)\text{ a. p. } t \text{ în } I. \tag{2}$$

Teorema 2. Fie aplicația măsurabilă $V:\Omega\to L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)$ şi aplicația $(\omega,t)\to F(\omega,t)$ care satisface condiția Teoremei 1.

Atunci pentru orice $\omega\in\Omega$

$$\rho_{L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)}\left(V(\omega),\Phi_F(\omega)\right)=\int_I\rho_h\left(V(\omega)(t),F(\omega,t)\right)dt.$$

Teorema 3. Fie $V:\Omega\to L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)$ - măsurabilă şi pentru orice $\varepsilon>0$ există o selecție măsurabilă $Y:\Omega\to L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)$ ai aplicației $\Phi_F(\omega)$, astfel încât

$$\square_{L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)}\left(V(\omega),Y(\omega)\right)\le\rho_{L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)}\left(V(\omega),\Phi_F(\omega)\right)+\varepsilon.$$

Atunci pentru fiecare $\omega\in\Omega$ şi orice $I^*\in T$ are loc inegalitatea.

$$\square_{L^1cc\left(I^*,convR^m,\lambda\right)}\left(V(\omega),Y(\omega)\right)\le\rho_{L^1cc\left(I^*,convR^m,\lambda\right)}\left(U(\omega),\Phi_F(\omega)\right)+\varepsilon$$

Teorema 4. Dacă aplicația F satisface condiția (1), atunci aplicația $\omega\to A(\omega)=\int_I F(\omega,t)dt$ este o aplicație multivalorică ω- măsurabila din Ω în $C\left(R^m\right)$.

Teorema 5. Fie aplicația multivalorică măsurabilă $Y:\Omega\to convR^m$ şi aplicația multivalorică $F(\cdot,\cdot):\Omega\times I\to C\left(R^m\right)$ - (ω,t) - măsurabila şi integral mărginită de aplicația $g(\cdot)\in L^1\left(I,R^1,\lambda\right)$. Atunci există aplicațiile măsurabile $X:\Omega\to convR^m$ şi $F:\Omega\to L^1cc\left(I,convR^m,\lambda\right)$ astfel încît

1. $X(\omega)=\int_I F(\omega)(t)\in\int_I F(\omega,t)dt,\ \omega\in\Omega,\ F(\omega)(t)\in F(\omega,t)\ a.p.,\ (\omega,t)\in\Omega\times I.$

2. $h\left(X(\omega),Y(\omega)\right)=\rho_h\left(Y(\omega),\int_I F(\omega,t)dt\right),\ \omega\in\Omega.$

Bibliografie

1. Dragan V. *Unele proprietăți a mulțimilor decomposabile în spațiul aplicațiilor multivalorice*. Conferința Tehnico-ştiințifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor şi Studenților UTM, Chişinău, 2007, 254-255 p.
2. Плотников А. В. *Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления.* Деп. ВИНИТИ, 26.04.82, N2030-82, стр. 35.