VERSIUNEA STOCASTICĂ AL TEOREMEI A. F. FILIPPOV PENTRU INCLUZIUNI DIFERENȚIALE CU DERIVATA HUKUHARA

Vladimir DRAGAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se demonstrează teorema de existență şi de dependență a soluțiilor de parametru pentru ecuațiile diferențiale cu membrul drept multivaloric şi stocastic cu derivata Hukuhara .*

Cuvinte cheie: *Aplicație multivalorică absolut continue, ecuație diferențială cu membrul drept multivoc, metrica Hausdorf, derivata Hukuhara.*

Celebra teoremă Filippov de existență a soluțiilor absolut continui pentru ecuații diferențiale ordinare cu membrul drept multivaloric – incluziuni diferențiale [4] este extinsă şi generalizată pentru diverse clase de incluziuni [1-4].

În această lucrare vom stabili versiunea stocastică a teoremei Filippov pentru incluziuni diferențiale cu derivata Hukuhara.

Fie (Ω, U, P) spațiul probabilistic complet, $AC(I, convR^n)$ spațiul aplicațiilor multivalorice absolut continui din $I=[a,b]$ în $(convR^n, h)$.

Examinăm incluziunea

$$DhX(\omega,t) \in F\ (\omega,t,X),\ X(\omega,o)=X_0(\omega),\ t\in I=[a,b], \tag{1}$$

unde $X \in convR^n$, $\omega \in \Omega, F$ - o aplicație multivalorică, $DhX(\omega,\cdot)$ - derivata Hukuhara. $\omega \to X_0(\omega)$- aplicație măsurabilă.

Definiție. Aplicația multivalorică măsurabilă $Z:\Omega \to AC(I, convR^n)$ se numeşte soluție stocastică al incluziunii (1) dacă P a.p. $\omega \in \Omega$ are loc

$D_h Z(\omega,t) \in F\ (\omega,t,Z(\omega,t))$, a. p. $t\in I=[a,b]$ şi $Z(\omega)(0)=X_0(\omega)$,

$Z(\omega,t)=Z(\omega)(t)$, $\omega\in\Omega, t\in I$.

Fie $(C(R^n), d)$ spațiul metric al tuturor submulțimilor nevide compacte convexe din spațiul $convR^n$ dotat cu metrica d $[3]$:

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \max\left\{\max_{A\in\mathcal{A}}\min_{B\in\mathcal{B}} h(A,B), \max_{B\in\mathcal{B}}\min_{A\in\mathcal{A}} h(A,B)\right\},\ A,B\in convR^n,\ \mathcal{A},\mathcal{B}\in C(R^n).$$

Teorema 1. Fie că aplicația multivalorică $F\ :\Omega\times I\times convR^n \to (C(R^n),d)$ satisface condițiile:

4. aplicația $(\omega,t)\to F\ (\omega,t,X)$ este măsurabilă pentru fiecare $X\in convR^n$;
5. există o funcție scalară măsurabilă integrabilă Lebesque $k:\Omega\to L(I)$ astfel încît pentru orice $X,Y\in convR^n$ şi fiecare $\omega\in\Omega$.

$d\left(F\ \ (\omega,t,X),F\ \ (\omega,t,Y)\right)\le k(\omega)(t)h(X,Y)$ a. p. în I;

6. pentru aplicația măsurabilă Y din Ω în $AC\left(I,convR^n\right)$, $Y(\omega)(o)=Y_0(\omega)$, există aplicația măsurabila $\beta_y:\Omega\to L(I)$ astfel încît pentru orice $\omega\in\Omega$ a.p. t în I.

$$\rho_{convR^n}\left(D_hY(\omega)(t),F\ \ (\omega,t,Y(\omega)(t))\right)\le\beta_y(\omega)(t).$$

Atunci pentru orice $\delta>0$ există o aplicație măsurabilă $X:\Omega\to AC\left(I,convR^n\right)$ astfel încît

1. pentru orice $\omega\in\Omega$ aplicația $t\to X(\omega,t)\equiv X(\omega)(t)$ este soluție stocastică al incluziunii (1).
2. pentru orice $(\omega,t)\in(\Omega,I)$ are loc

$$h\left(X(\omega)(t),Y(\omega)(t)\right)\le\delta e^{m(\omega,t)}+\int_0^t\beta_y\left(\omega(s)e^{m(\omega,t)-m(\omega,s)}ds+h\left(X_0(\omega),Y_0(\omega)\right)e^{m(\omega,t)}\right.,$$

unde $m(\omega,t)=\int_0^t k(\omega)(s)ds$.

Notă: În cazul în care $F\ :\Omega\times R'\times R^n\to convR^n$, din teoremă obținem teorema de existență pentru incluziuni stocastice cu derivate ordinare $\dot{x}\in F\ \ (\omega,t,x(t))$, iar dacă $F\ \ (\omega,t,X)$ constă dintr-un singur element al spațiului $C\left(R^n\right)$, obținem teorema de existență pentru ecuații cu derivata Hukuhara [5].

$$DhX(\omega,t)=F\left(\omega,t,X(t)\right),\ X(\omega,o)=X_0(\omega).$$

Bibliografie

1. Драган В. А. *Оценка разности решений и метод усреднения включений.* Труды института системного анализа Российской Академии Наук. Динамика нелинейных систем, том 17(1), 2005, стр. 120-144.
2. Драган В. А. *О методе усреднения с весом для дифференциальных включений.* Труды института системного анализа Российской Академии Наук. Динамика неоднородных систем, выпуск 10(1), 2006, стр. 121-143.
3. Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью.* Астро принт, Одесса, 1999. стр. 354.
4. Филиппов А. Ф. *Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.* Вестник МГУ Математика и механика, выпуск 3, 1967, стр. 16-26.
5. Dragan V., Izman M. *Random problems depending on a parameter.* Труды Института Системного Анализа Российской Академии Наук. Динамика неоднородных систем. Том 9(1), 2006, стр. 85-98.