

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Cu titlul de manuscris

C.Z.U.: 624.04:539.3/.6:517(043.3)

GALBINEAN SERGIU

**CALCULUL PLĂCILOR PRIN METODA ELEMENTELOR DE
FRONTIERĂ BAZATĂ PE SOLUȚII DISCONTINUE**

135.02. Mecanica corpului solid

Rezumatul tezei de doctor în științe inginerești

CHIȘINĂU 2024

Teza a fost elaborată în cadrul departamentului Inginerie Civilă și Geodezie al Universității Tehnice a Moldovei

Conducător științific:

MORARU Gheorghe, dr. hab. în șt. fiz.-mat., prof. univ.

ȘEREMET Victor, dr. hab. în șt. fiz.-mat., prof. univ.

Referenți oficiali:

BARSUC Alexandr, dr. hab. în șt. fiz.-mat., prof. univ., Universitatea de Stat din Moldova

COANDĂ Ilie, dr. în șt. fiz.-mat., conf. univ., Academia de Studii Economice a Moldovei

Consiliul Științific Specializat:

Președinte: **BOSTAN Viorel**, dr. hab. în tehn., prof. univ.

Secretar științific: **TARANENCO Anatolie**, dr. în tehn., conf. univ.

Membru: **RUSU Ion**, dr. hab. în tehn., prof. univ.

Membru: **PAȚIUC Vladimir**, dr. în șt. fiz.-mat., conf. univ.

Membru: **GRAMA Vasile**, dr. în tehn., conf. univ.

Susținerea va avea loc la **14.06.2024**, ora **14⁰⁰** în ședința Consiliului științific specializat D 135.02-23-49 din cadrul Universității Tehnice a Moldovei, FCGC, str. bd. Dacia, 41, blocul de studii nr.10, aud. 310, MD- 2060, Chișinău, Republica Moldova

Teza de doctor și rezumatul pot fi consultate la biblioteca tehnico-științifică a Universității Tehnice a Moldovei și pe pagina web a ANACEC (www.anacec.md)

Rezumatul a fost expediat la 07.05.2024

Secretar științific al Consiliului științific specializat:

TARANENCO Anatolie, dr. în tehn., conf. univ.

Conducător științific:

ȘEREMET Victor, dr. hab. în șt. fiz.-mat., prof. univ.

Autor

GALBINEAN Sergiu

CUPRINS

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII	4
Actualitatea și importanța problemei abordate.....	4
Scopul tezei	4
Obiectivele cercetării.....	4
Ipoteza de cercetare.....	5
Sinteza metodologiei de cercetare și justificarea metodelor de cercetare alese .	5
Aprobarea rezultatelor cercetărilor.	5
Sumarul compartimentelor tezei	5
CONȚINUTUL TEZEI	6
Capitolul 1. Ecuațiile de bază pentru plăci conform teoriei clasice și a teoriei lui Reissner.....	6
Capitolul 2. Metode numerice de calcul.....	8
Capitolul 3. Soluții discontinue pentru plăci	12
CONCLUZII GENERALE.....	22
RECOMANDĂRI	22
BIBLIOGRAFIE	23
LISTA PUBLICAȚIILOR LA TEMA TEZEI DE DOCTOR.....	25
ADNOTARE	26

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța problemei abordate

Plăcile sunt elemente importante ale diferitor structuri de rezistență. Aceste elemente se regăsesc în construcțiile civile, în construcțiile navale, aeronautică etc.

Deși teoria de calcul are o istorie de peste 200 de ani, până în prezent nu există metode care ar rezolva toate tipurile de probleme întâlnite ale încovoierii plăcilor. Unele soluții pentru plăci dreptunghiulare și circulare sunt prezentate în serii Fourier slab convergente [21], însă acestea nu pot fi utilizate pentru toate modurile de rezemare și cazurile de încărcare. Odată cu dezvoltarea tehnicii computaționale au fost elaborate metode numerice de calcul. Cele mai răspândite sunt: Metoda Diferențelor Finite (MDF), Metoda Elementelor Finite (MEF) și Metoda Elementelor de Frontieră (MEFr).

În ultimul timp este larg răspândită metoda elementelor finite. Cel mai mare dezavantaj al calculului plăcilor prin MEF constă în utilizarea problematică a elementelor finite cu un număr sporit de grade de libertate în noduri, care ar putea satisface toate condițiile la limită posibile. S-a constatat că majoritatea programelor MEF nu conțin elemente finite de placă cu un număr mai mare de trei grade de libertate în nod. Dacă sunt utilizate elemente de plăci curbe, numărul de grade de libertate se majorează până la șase, însă nu conțin toți parametrii necesari pentru a satisface toate condițiile de frontieră. De regulă, MEF conduce la rezolvarea unui sistem masiv de ecuații liniare, ce necesită mult timp, memorie internă și spațiu de stocare a datelor în calculator pentru rezolvarea lor. Totodată, MEF este inefficientă: la calculul plăcilor cu condiții mixte la limită, a problemelor ce prezintă concentrări de tensiuni, defecte, probleme de contact etc. Problemele sunt actuale și la moment nu au soluții satisfăcătoare.

Soluțiile propuse în această lucrare exclud dezavantajele enunțate și oferă noi posibilități de calcul, eficacitate, precizie și cheltuieli minime ale resurselor calculatorului.

Scopul tezei

Scopul studiului efectuat în această lucrare constă în obținerea și aplicarea soluțiilor discontinue în metoda elementelor de frontieră pentru calculul plăcilor plane.

Obiectivele cercetării

Pentru atingerea scopului propus a fost necesar de a îndeplini următoarele obiective:

- obținerea soluțiilor discontinue la calculul plăcilor plane cu diferite moduri de rezemare, încărcări, defecte etc., atât în interpretarea clasică, cât și ținând seama de deformațiile din forfecare (teoria Reissner);
- rezolvarea integralelor de frontieră și tratarea singularităților acestora;
- implementarea numerică a soluțiilor discontinue;
- elaborarea programelor de calcul pentru a rezolva problemele ce se regăsesc în practica de proiectare curentă;
- validarea rezultatelor obținute prin MEFr.

Ipoteza de cercetare

Soluțiile prezentate în această lucrare au fost construite pornind de la ipotezele teoriei clasice a plăcilor și teoria ce ține cont de deformațiile transversale de forfecare (Teoria Reissner).

Sinteza metodologiei de cercetare și justificarea metodelor de cercetare alese

Problemele de încovoiere ale plăcilor plane, abordate în această lucrare, au fost analizate folosind metoda indirectă a elementelor de frontieră. Această metodă numerică, relativ nouă, poate fi aplicată la rezolvarea unui șir de probleme, pentru care metodele numerice și analitice existente nu au soluții sau nu oferă o exactitate satisfăcătoare. În MEFr discretizării este supus doar conturul plăcii, iar acest lucru conduce la reducerea dimensiunii sistemului global de ecuații față de celelalte metode numerice, totodată MEFr conferă o exactitate mai bună, soluțiile fiind continue în interiorul domeniului și numerice la conturul plăcii.

Aprobarea rezultatelor cercetărilor.

Rezultatele cercetărilor au fost aplicate în cadrul proiectului de cercetare științifică cu titlul: „Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue”. Director de proiect: Moraru Gh. Perioada de realizare: 2011-2014. Deasemenea, rezultatele au fost expuse în 10 lucrări științifice.

Sumarul compartimentelor tezei

Capitolul 1. *„Ecuațiile de bază pentru plăci utilizând teoria clasică și teoria lui Reissner”* prezintă evoluția teoriilor și metodelor de calcul de la apariția primelor formulări matematice și până în prezent. Sunt enumerate cele mai importante publicații științifice de-a lungul timpului care au contribuit la dezvoltarea tehnicii de calcul. Tot în acest capitol este descrisă teoria clasică a plăcilor și teoria, care ține cont de deformațiile din forfecare.

Capitolul 2. *„Metode numerice de calcul”* include cele mai utilizate metode numerice de calcul a plăcilor la momentul actual, și anume: Metoda elementelor finite (MEF), Metoda elementelor de frontieră (MEFr) în formularea directă și cea indirectă. Sunt prezentate principalele avantaje și dezavantaje ale metodelor numerice.

Capitolul 3. *„Soluții discontinue pentru plăci”*. În acest capitol se propune spre cercetare o nouă direcție în metoda indirectă a elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. Aceste soluții au fost aplicate la rezolvarea mai multor probleme de încovoiere a plăcilor: contur arbitrar, diferite moduri de rezemare, diferite tipuri de încărcări, defecte etc. Pentru a demonstra veridicitatea și corectitudinea metodei propuse, a fost elaborat un program de calcul scris în limbajul Matlab, cu ajutorul căruia au fost calculate deplasările și eforturile în plăci pentru problemele menționate mai sus. Rezultatele obținute au fost comparate cu MEF și cu cele analitice.

CONȚINUTUL TEZEI

Capitolul 1. Ecuțiile de bază pentru plăci conform teoriei clasice și a teoriei lui Reissner.

În teoria clasică a plăcilor, în afara ipotezelor fundamentale folosite în mecanica solidului deformabil se introduc ipoteze suplimentare [13, 22] specifice plăcilor:

1. Planul median al plăcii nu suferă deformații de întindere, compresiune sau lunecare. Acesta se consideră neutru, analogic cu axa din teoria barelor. Din această ipoteză rezultă că în punctele planului median al plăcii, deplasările în direcția axelor OX și OY sunt nule.

2. Segmentul rectiliniu normal la suprafața mediană înainte de deformare rămâne rectiliniu și normal la suprafața deformată a planului median și nu-și schimbă lungimea.

3. Ipoteza statică: tensiunile ce acționează în direcția normalei la suprafața mediană σ_z pot fi neglijate. Adică se neglijează interacțiunile straturilor plăcii paralele cu suprafața mediană. Aceasta corespunde unei stări plane de tensiuni.

Tensiuni în plăcile subțiri la încovoiere în formularea clasică

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} Z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2} Z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)} Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Conform ipotezelor de calcul, tensiunile σ_z , τ_{xz} și τ_{yz} sunt nule. În realitate, ele nu pot fi nule, întrucât nu se va realiza echilibrul în placă. În scopul determinării acestor tensiuni se vor utiliza ecuațiile de echilibru ale unui element de placă, introducând încă o ipoteză: întrucât grosimea plăcii este mică în raport cu dimensiunile ei din plan, se consideră că forțele volumice pot fi neglijate. Astfel, relația σ_z se scrie:

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} Z - \frac{z^3}{3} \right) \Delta(\Delta w) - \frac{p(x,y)}{2}. \quad (1.2)$$

Eforturi în plăcile subțiri la încovoiere în formularea clasică

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{yx} &= M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

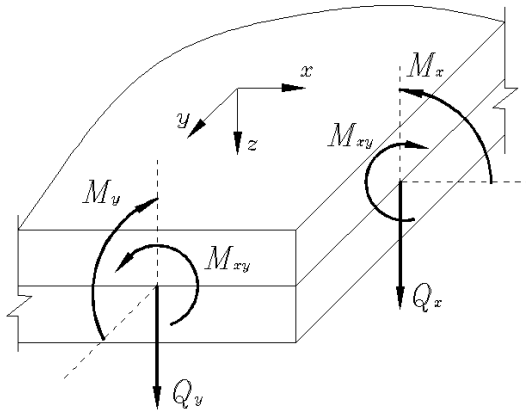


Fig. 1.1. Direcțiile de acțiune ale eforturilor

Ecuatia diferențială a suprafeței mediane în formularea clasică

Dacă se va considera relația (1.2) și condițiile pe suprafața plăcii $z = h/2$, se obține:

$$\Delta(\Delta w) = \frac{p(x,y)}{D}. \quad (1.4)$$

Relația (1.4) este cunoscută ca ecuație diferențială a suprafeței mediane a plăcii plane subțiri, numită și ecuația generală a încovoierii plăcilor plane. În formă desfășurată aceasta se va scrie:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}. \quad (1.5)$$

Această ecuație este considerată guvernantă, întrucât dacă se poate preciza așa o funcție $w(x,y)$ pentru suprafața mediană deformată, care satisface atât ecuația diferențială de echilibru (1.5), cât și condițiile de pe conturul plăcii, atunci starea de tensiuni, deformații și deplasări în fiecare punct al plăcii este rezolvată. Aceasta mai este numită ecuația lui Sophie Germain [8].

Introducerea celor trei ipoteze simplificatoare enunțate mai sus, permite reducerea problemei spațiale, la determinarea unei singure funcții de două variabile independente; altfel zis, problema tridimensională a fost redusă la o problemă bidimensională.

Teoria Reissner a încovoierii plăcilor

Ca și în cazul grinzilor, de regulă, la calculul plăcilor conform ipotezelor teoriei clasice influența forțelor transversale asupra săgeții este neglijată. Însă, pentru grinzi scurte sau plăci de grosime considerabilă această influență devine mai pronunțată, și trebuie inclusă în calcul. Mai mulți cercetători sau ocupat de această problemă. Printre aceștia se numără: Reissner [17-19], Midlin [12], Love [10], Timoshenko și Woinowsky-Krieger [21], Huber [9] etc.

Eforturi în Teoria Reissner

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}; \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}; \\ M_{xy} &= (1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right); \\ Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}; \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Egalând $h=0$ se obțin expresiile respective ale teoriei clasice. Conform teoriei exacte rezultă că expresiile și ecuațiile teoriei clasice sunt valabile doar pentru plăcile subțiri.

Din a treia ecuație de echilibru se obține ecuația diferențială a suprafeței mediane în teoria exactă.

$$D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2(2-\nu)}{10(1-\nu)} \Delta q \quad (1.7)$$

Ecuația primită este de ordinul patru, deci pot fi prescrise câte două condiții la limită pentru fiecare latură a plăcii. Pentru obținerea condiției suplimentare, se introduce în relații o funcție nouă – funcția de tensiune, care conduce la obținerea ecuației suplimentare diferențiale de ordinul doi.

$$\Delta\psi - \frac{10}{h^2}\psi = 0. \quad (1.8)$$

Introducerea ecuației diferențiale suplimentare de ordinul doi face posibilă îndeplinirea tuturor condițiilor la limită necesare, astfel pentru fiecare latură pot și trebuie să fie satisfăcute trei condiții în loc de două. Prin urmare, în colțurile plăcilor nu vor mai apărea reacțiuni concentrate.

Capitolul 2. Metode numerice de calcul

Odată cu apariția tehnicii moderne de calcul, metodele numerice [6] au cunoscut și ele o dezvoltare intensă, în comparație cu cele analitice. Metodele numerice pot fi aplicate la rezolvarea unui spectru mai larg de probleme ale teoriei elasticității, deoarece soluționează aproximativ ecuațiile fundamentale ale teoriei elasticității.

Cele mai utilizate metode de calcul pentru rezolvarea problemelor de elasticitate, termoelasticitate, elastoplasticitate, mecanica ruperii materialelor sunt:

- a) Metoda Diferențelor Finite – MDF;
- b) Metoda Elementelor Finite – MEF;
- c) Metoda Elementelor de Frontieră – MEFr.

Metoda elementelor finite (MEF)

Metoda elementelor finite (MEF) actualmente este cea mai utilizată metodă numerică de calcul a plăcilor [16, 23]. MEF este foarte eficientă pentru studierea

multiplelor probleme extrem de variate din diferite domenii de activitate ale inginerului. MEF, de regulă, determină rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice cu un număr mare de necunoscute. Din acest motiv, ea este strâns legată de utilizarea calculatoarelor. Un șir de softuri au fost create pe baza MEF așa cum sunt: Ansis, AxisVM, Nastran, SCAD, Lira etc.

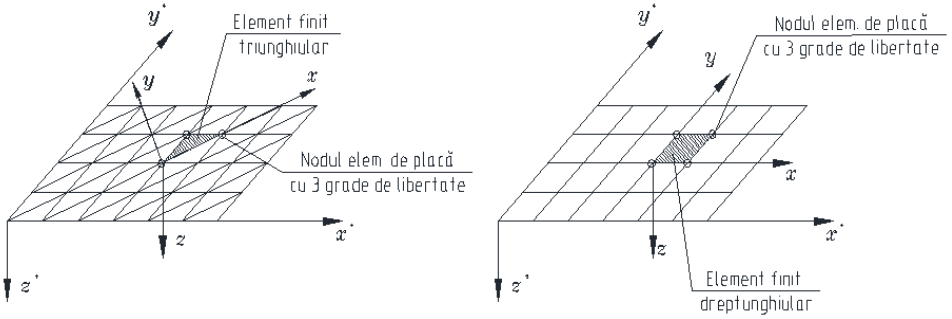


Fig. 2.1. Tipuri de elemente finite

Problema de bază a MEF este de a determina matricea de rigiditate a elementului finit. Pentru elementul finit triunghiular, matricea de rigiditate în coordonate locale are forma:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{44}^* & 0 & k_{46}^* & k_{47}^* & k_{48}^* & k_{49}^* \\ & & & & k_{55}^* & 0 & 0 & k_{58}^* & 0 \\ & & & & & k_{66}^* & k_{67}^* & k_{68}^* & k_{69}^* \\ & & & & & & k_{77}^* & k_{78}^* & k_{79}^* \\ & & & & & & & k_{88}^* & k_{89}^* \\ & & & & & & & & k_{99}^* \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

simetric

Sistemul global de ecuații al structurii analizate are forma:

$$[K]^{sist} \{\delta\} = \{F\}, \quad (2.2)$$

unde: $[K]^{sist}$ – reprezintă matricea globală de rigiditate;

$\{\delta\} = [w_i \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi} \ w_j \ \varphi_{xj} \ \varphi_{yj} \ w_l \ \varphi_{xl} \ \varphi_{yl}]$ – vectorul parametrilor nodali;

$\{F\} = [T]\{F^*\}$ – vectorul forțelor nodale în sistemul global de coordonate;

$\{F^*\}$ – vectorul încărcărilor nodale în sistemul local de coordonate.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații (2.2) sunt folosite diferite metode: Gauss, Choleski ș.a., care oferă posibilitatea de a obține vectorul deplasărilor $\{\delta\}$, adică valorile în noduri ale funcțiilor căutate. Cu ajutorul deplasărilor nodale obținute pot fi calculate tensiunile și eforturile în fiecare element finit.

Metoda elementelor de frontieră (MEFr).

Există două formulări distinctive ale metodei elementelor de frontieră: *directă* și *indirectă*.

La baza *formulării directe* se află teorema reciprocității lucrului mecanic (teorema Maxwell-Betti) și soluțiile fundamentale reprezentate de funcțiile de influență Green [1, 11, 20] pentru un domeniu înfinit. Prin funcția Green se înțelege soluția ecuației diferențiale parțiale, în care termenul neomogen a fost înlocuit cu produsul funcțiilor delta, astfel, reprezentând efectul unei forțe concentrate. În consecință, soluția fundamentală satisface ecuația diferențială în orice punct al domeniului înfinit cu excepția punctului sursă. În acest punct soluția va prezenta singularitate și va tinde la infinit.

Soluția fundamentală a ecuației diferențiale parțiale de ordinul patru (1.5) are forma:

$$w^*(P, Q) = \frac{r^2}{8\pi D} \ln(r), \quad (2.3)$$

Prima ecuație integrală generală a încovoierii plăcilor poate fi exprimată de-a lungul frontierei prin unghiul de rotire pe direcția normalei θ_n , momentul încovoietor M_n , forța transversală generalizată V_n și reacțiunile de colț R_i . Acestea are forma:

$$Cw(P) - \int_L (M_n^* \theta_n + V_n^* W) dL - \sum_{i=1}^{N_c} W_i R_i^* = \iint_A p w^* dA \quad (2.4)$$

A doua ecuație se obține prin diferențierea ecuației fundamentale (2.4) în raport cu normala n :

$$C \frac{\partial w(P)}{\partial n} - \int_L \left(\frac{\partial M_n^*}{\partial n} \theta_n + \frac{\partial V_n^*}{\partial n} W \right) dL - \sum_{i=1}^{N_c} W_i \frac{\partial R_i^*}{\partial n} = \iint_A p \frac{\partial w^*}{\partial n} dA, \quad (2.5)$$

unde $\partial w(P)/\partial n$ este unghiul de rotire pe direcția normalei în punctul P .

Ecuațiile (2.4) și (2.5) reprezintă formularea integrală pentru placă fără condiții de frontieră. Pentru a rezolva aceste două ecuații integrale este necesar de a discretiza frontiera plăcii în segmente.

O variantă a metodei indirecte a elementelor de frontieră, numită și metoda extinderii sistemului dat, a fost propusă de Lujin [24]. Această formulare se numește „*indirectă*” deoarece folosește funcții sau densități fictive care nu au nici o semnificație fizică, dar pot fi aplicate la calculul unor mărimi fizice cum sunt deplasările și tensiunile în cazul elasticității. În cadrul metodei indirecte, în prima etapă sunt rezolvate singularitățile, astfel încât să fie satisfăcute condițiile pe frontieră, iar în a doua etapă se calculează valorile necunoscutelor pe frontieră în funcție de soluțiile singulare.

Se va considera, că în sistemul cartezian de coordonate este dată o placă (Fig. 2.2.) acționată de o sarcină transversală $q(x,y)$ și în care sunt date condițiile la limită. În locul plăcii date se va examina o altă placă, de dimensiuni mari în plan, care ar include regiunea corespunzătoare plăcii inițiale. Forma acestei plăci și condițiile la limită trebuie să fie selectate în așa mod ca pentru aceasta să fie cunoscute soluțiile și, respectiv, să poată fi găsită funcția lui Green $G(x,y,\zeta,\eta)$, care determină săgeata în orice punct al plăcii extinse cu coordonatele x,y de la acțiunea unei forțe concentrate aplicată în punctul cu coordonatele ζ, η .

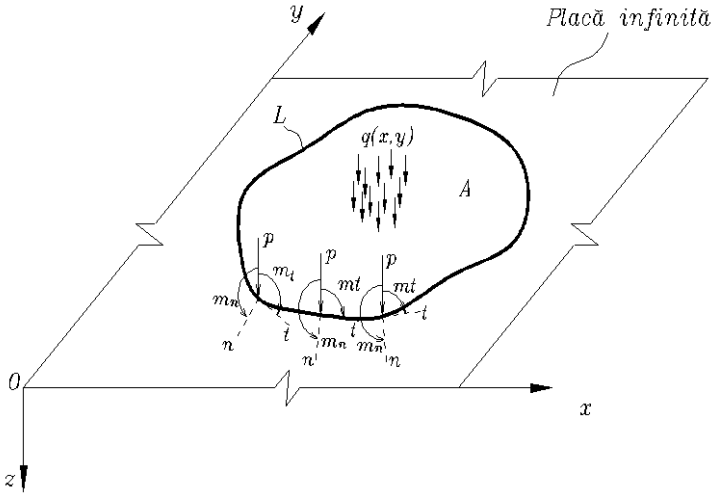


Fig. 2.2. Sarcini echivalente aplicate pe conturul plăcii

Sistemul de ecuații integrale în formularea indirectă:

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_L p(s)G(x, y, s)ds + \int_L m_n(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial n} \partial s + \int_L m_t(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial t} \partial s + \\
 & \quad + \iint_A q(\xi, \eta)W(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta = 0; \\
 & \int_L p(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial h} \partial s + \int_L m_n(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial h \partial n} \partial s + \int_L m_t(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial h \partial t} \partial s + \\
 & \quad + \iint_A q(\xi, \eta) \frac{\partial w(x, y, \xi, \eta)}{\partial h} d\xi d\eta = 0; \\
 & \int_L p(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial g} \partial s + \int_L m_n(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial y \partial n} \partial s + \int_L m_t(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial g \partial t} \partial s + \\
 & \quad + \iint_A q(\xi, \eta) \frac{\partial w(x, y, \xi, \eta)}{\partial g} d\xi d\eta = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Înlocuind sistemul de ecuații integrale primit cu un sistem de ecuații algebrice, și pe conturul L luând un număr i de puncte, și în fiecare punct se va aplica o forță concentrată $P_i=p\Delta s$ și momente concentrate $M_{ni}=m_n\Delta s$ și $M_{ti}=m_t\Delta s$, atunci:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^i (P_j w_{kj} + M_{nj} w_{nkj} + M_{tj} w_{tkj}) + w_{qk} &= 0; \\ \sum_{j=1}^i (P_j \vartheta_{kj} + M_{nj} \vartheta_{nkj} + M_{tj} \vartheta_{tkj}) + \vartheta_{qk} &= 0; \\ \sum_{j=1}^i (P_j \psi_{kj} + M_{nj} \psi_{nkj} + M_{tj} \psi_{tkj}) + \psi_{qk} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$(k = 1, 2, \dots, i)$

În ecuațiile (2.23) sunt utilizate următoarele notații:

w_{kj} – săgeata în punctul k de la o forță unitară, aplicată în punctul j ;

w_{nkj} – săgeata în punctul k de la un moment unitar, aplicat în punctul j în direcția normalei la conturul L ;

w_{tkj} – săgeata în punctul k de la un moment unitar, aplicat în punctul j în direcția tangentei la conturul L ;

w_{qk} – săgeata în punctul k de la încărcare exterioară.

Acelaș sens îl au coeficienții, care intră în ecuația a doua și a treia, numai că prin ϑ au fost notate unghiurile de rotire a normalei la contur în raport cu tangenta, iar prin ψ – unghiurile de rotire a tangentei în raport cu normala.

După rezolvarea sistemului de ecuații (2.7) poate fi găsită săgeata în orice punct cu coordonatele x, y de pe regiunea A :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{j=1}^i P_j w_{kj}(x, y, a_j, b_j) + \sum_{j=1}^i M_{nj} w_{nkj}(x, y, a_j, b_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^i M_{tj} w_{tkj}(x, y, a_j, b_j) + w_q(x, y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Prin diferențierea soluției (2.8), pot fi determinate toate deplasările și eforturile căutate.

Capitolul 3. Soluții discontinue pentru plăci

În acest capitol este descrisă metodologia de obținere a soluțiilor discontinue în mecanica corpului solid deformabil elaborată de către prof. Gh. Moraru în lucrările [14, 15, 25-28], aplicarea și implementarea numerică a acestora, de către autorul tezei pentru rezolvarea problemelor de încovoiere a plăcilor. Pentru a demonstra corectitudinea și eficacitatea soluțiilor discontinue, au fost rezolvate un șir de probleme practice ale plăcilor, rezultatele obținute fiind comparate cu alte metode analitice și numerice.

Soluții provenite din salturi concentrate

Se va considera o placă infinită având pe axa y ($x = 0$) un defect (fisură, articulație plastică, gaură etc.) (Fig. 3.1.).

Soluția ecuației diferențiale a suprafeței mediane a plăcii (1.12.) este alcătuită din suma a două stări: prima provenită din sarcina exterioară și a doua – din salturile corespunzătoare defectului. Ultima se va obține prin integrarea soluțiilor obținute din salturile concentrate cu ajutorul transformării generalizate Fourier.

Dacă se va efectua trecerea funcțiilor de la o parte a defectului la cealaltă, acestea pot căpăta salt: săgeata w , unghiul de rotire θ_x , momentul de încovoiere M_x , forța tăietoare generalizată V_x .

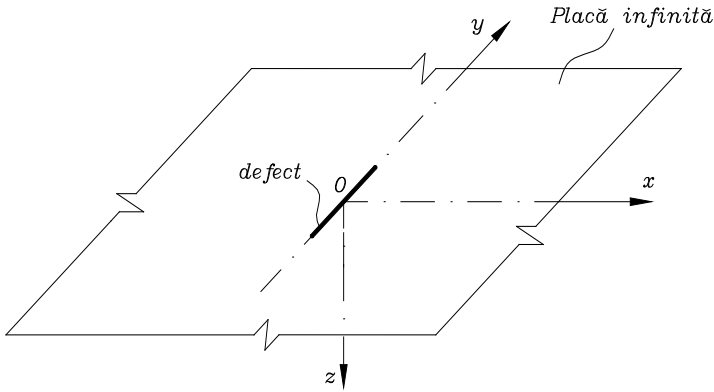


Fig. 3.1. Placă infinită cu defect.

Pentru toate salturile sus-menționate va fi introdusă următoarea notație:

$$\begin{aligned}
 w(-0, y) - w(+0, y) &= \langle w(y) \rangle; \\
 \theta_x(-0, y) - \theta_x(+0, y) &= \langle \theta_x(y) \rangle; \\
 M_x(-0, y) - M_x(+0, y) &= \langle M_x(y) \rangle; \\
 V_x(-0, y) - V_x(+0, y) &= \langle V_x(y) \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soluțiile din salturile concentrate pot fi obținute dacă se va aplica la ecuația plăcilor (1.5) transformarea generalizată Fourier [29] considerând $q(x, y) = 0$.

Relațiile dintre salturile concentrate și deplasări:

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \tag{3.2}$$

unde elementele g_{ij} au forma [8]:

$$g_{11} = -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(3 - \nu)x^2 + (1 + \nu)y^2]; \quad g_{12} = -\frac{1}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln r + (1 - \nu) \frac{x^2}{r^2} \right]; \dots$$

Relațiile dintre salturi și eforturi:

$$\begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \\ Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \tag{3.3}$$

unde elementele t_{ij} au forma [8]:

$$t_{11} = \frac{3(1-\nu)^2 D}{2\pi} \frac{x}{r^8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4);$$

$$t_{21} = \frac{(1-\nu)D}{2\pi} \frac{x}{r^8} [-(5-\nu)x^4 + 2(11-7\nu)x^2y^2 + 3(1+3\nu)y^4]; \dots$$

Relațiile dintre salturi și forțele tăetoare generalizate [8]:

$$\begin{Bmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

unde elementele l_{ij} au forma:

$$l_{11} = \frac{3(1-\nu)D}{2\pi r^{10}} [(7-3\nu)x^6 - 5(11-7\nu)x^4y^2 + 5(1-5\nu)x^2y^4 + (3+\nu)y^6];$$

$$l_{12} = -\frac{3(1-\nu)^2 D}{2\pi} \frac{x}{r^8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4); \dots$$

Soluții discontinue pentru placa de contur arbitrar

Soluțiile obținute din salturile concentrate pot fi folosite ca funcții Green, astfel prin superpoziție pot fi scrise soluțiile discontinue pentru defectul amplasat pe un contur arbitrar L (Fig. 3.2.).

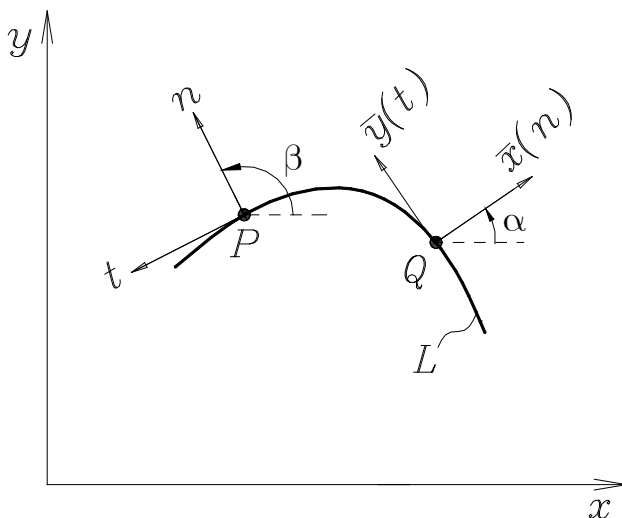


Fig. 3.3. Sisteme de coordonate locale amplasate pe defectul L .

Dacă se va trece de la un sistem local de coordonate (\bar{x}, \bar{y}) la alt sistem local (n, t) amplasat în orice punct P se obține:

$$\begin{aligned}
 w^*(P) &= \int_L \bar{w}(P, Q) ds_Q; \\
 \theta_n^*(P) &= \int_L [\bar{\theta}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{\theta}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q; \\
 M_n^*(P) &= \int_L [\bar{M}_x(P, Q) \cos^2 \gamma + \bar{M}_y(P, Q) \sin^2 \gamma \\
 &\quad + 2\bar{M}_{xy}(P, Q) \cos \gamma \sin \gamma] ds_Q; \\
 M_{nt}^*(P) &= \int_L \{[\bar{M}_y(P, Q) - \bar{M}_x(P, Q)] \cos \gamma \sin \gamma \\
 &\quad + M_{xy}(P, Q)(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)\} ds_Q; \\
 Q_n^*(P) &= \int_L [\bar{Q}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{Q}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q; \\
 V_n^*(P) &= Q_n^* + \frac{\partial M_{nt}^*}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

unde $\gamma = \beta - \alpha$.

Soluțiile discontinue sunt destinate pentru rezolvarea diferitor probleme ale plăcilor cu defecte. De asemenea, aceste soluții pot fi folosite la rezolvarea problemelor de bază ale plăcilor. În aceste cazuri frontiera va fi considerată ca defect.

Implimentarea numerică a soluțiilor discontinue [2-5, 7]

Se va studia o placă de contur arbitrar cu diferire condiții la limită (Fig. 3.4.), având un defect cu lungimea L_d . Pe lungimea conturului L_1 placa va fi considerată simplu rezemată, pe L_2 – încastrată și pe L_3 – liberă.

Drept exemplu, se va considera că defectul (L_d) prezintă o articulație plastică. În acest caz, unghiul de rotire în direcția normalei la marginea defectului va avea salt: $\langle \theta_n \rangle \neq 0$.

Pentru a obține ecuațiile integrale, starea de deformație a plăcii este prezentată ca suma a două stări. Prima (notată cu cerculeț) provine de la sarcina exterioară, a doua (notată cu asterix) provine din salturile concentrate pe linia L a defectului:

Condițiile la limită sunt pentru:

- marginea simplu rezemată (L_1):
 $w^* + w^o = 0$; $M_n^* + M_n^o = 0$; $\langle \theta_n \rangle \neq 0$; $\langle V_n \rangle \neq 0$;
- marginea încastrată (L_2):
 $w^* + w^o = 0$; $\theta_n^* + \theta_n^o = 0$; $\langle M_n \rangle \neq 0$; $\langle V_n \rangle \neq 0$;
- margine liberă (L_3):
 $M_n^* + M_n^o = 0$; $V_n^* + V_n^o = 0$; $\langle w \rangle \neq 0$; $\langle \theta_n \rangle \neq 0$.

Soluțiile: w^o , θ_n^o , M_n^o și V_n^o depind de tipul sarcinii exterioare. De exemplu: dacă placa este acționată de o forță concentrată F aplicată în punctul cu coordonatele a_0 , b_0 față de originea sistemul global, atunci soluția în nodul i situat pe frontiera L va fi:

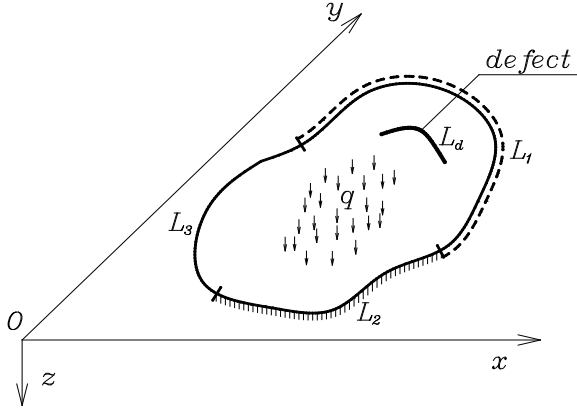


Fig. 3.4. Placă de contur arbitrar având diferite moduri de rezemare.

$$\begin{aligned}
 w_i^o &= F \cdot g_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0); \\
 \theta_{ni}^o &= F(n_x \theta_{xi}^o + n_y \theta_{yi}^o) = F[n_x g_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y g_{34}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)]; \\
 M_{ni}^o &= F(n_x^2 M_{xi}^o + n_y^2 M_{yi}^o + 2n_x n_y M_{xyi}^o) = F[n_x^2 t_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + \\
 &+ n_y^2 t_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + 2n_x n_y t_{34}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)]; \\
 V_{ni}^o &= F(n_x V_{xi}^o + n_y V_{yi}^o) = F[n_x l_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y l_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

unde $n_x = \cos \alpha$ și $n_y = \sin \alpha$.

Pentru alte cazuri de încărcare soluțiile pot fi obținute prin integrarea expresiilor (3.6).

Dacă conturul L ($L=L_1+L_2+L_3$) și defectul L_d va fi discretizat într-un set de elemente constante, se va obține următorul sistem de ecuații:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{j=n_{L3}} w_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} w_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} w_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} w_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -w_i^o; \\
 \sum_{j=n_{L3}} \theta_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} \theta_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} \theta_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -\theta_{ni}^o; \\
 \sum_{j=n_{L3}} m_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} m_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} m_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} m_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -M_{ni}^o; \\
 \sum_{j=n_{L3}} v_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} v_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} v_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} v_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -V_{ni}^o;
 \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

unde: n_{L1} , n_{L2} , n_{L3} reprezintă numărul de ordine al elementelor pe conturul L_1 , L_2 și respectiv L_3 , iar n_{Ld} – numărul de ordine al elementelor pe defectul L_d .

Rezolvând sistemul de ecuații (3.7) vor fi cunoscute toate salturile ale conturului exterior al plăcii și cele ale defectului, astfel pot fi calculate deplasările și eforturile în orice punct din interiorul plăcii, acestea fiind exprimate prin salturile obținute.

De exemplu, dacă este necesar de calculat săgeata într-un punct k din interiorul plăcii (Fig.3.5.), expresia va căpăta forma:

$$w_K = \sum_{j=n_{L3}} g_{11} \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} g_{12} \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} g_{13} \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} g_{14} \langle V_{nj} \rangle + w_K^o \quad (3.8)$$

Prin analogie, pot fi obținute expresiile pentru: unghiurile de rotire, momente și forțele tăietoare.

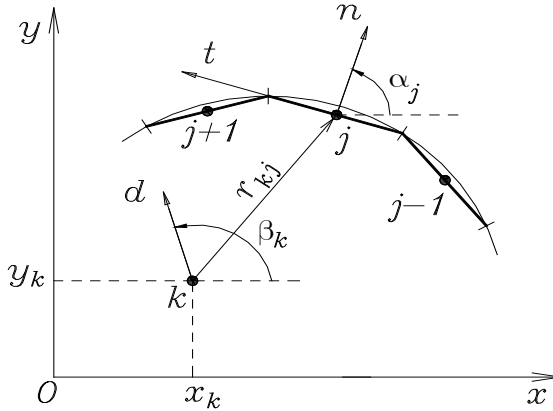


Fig. 3.5. Poziția punctului interior în raport cu elementele de frontieră constante.

Pentru a verifica corectitudinea metodei propuse în această lucrare, a fost elaborat un program de calcul în limbajul de programare Matlab. Cu ajutorul acestui program au fost calculate deplasările și eforturile pentru mai multe modele de plăci având diferite moduri de rezemare, diferite tipuri de încărcare, defecte etc. Rezultatele obținute au fost comparate cu cele analitice și cu metoda elementelor de frontieră (MEF).

Unul din cele mai generale modele cercetate în lucrare prezintă o placă de contur arbitrar, având diferite moduri de rezemare a conturului o parte a conturului încastrat, iar cealaltă – simplu rezemată (Fig. 3.6.) [2].

Pentru modelul MEFr pentru a calcula săgeata și eforturile în orice punct al plăcii a fost utilizat programul menționat anterior. În acest scop, conturul plăcii a fost discretizat în 50 de elemente constante (Fig. 7, a).

Pentru calculul cu MEF au fost construite 3 modele: i) 165 elemente și 182 noduri (Figure 7, b); ii) 321 elemente și 320 noduri (Fig. 7, c); iii) 641 elemente și 663 noduri (Fig. 7, d).

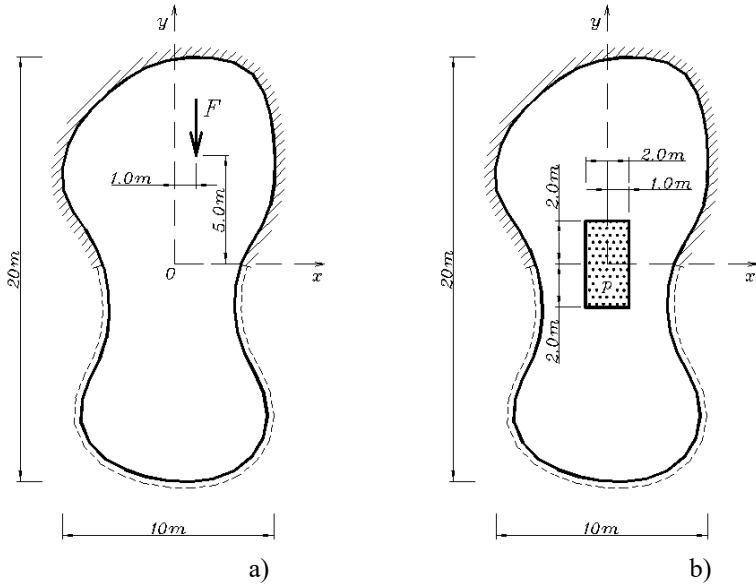


Fig. 3.6. Placă de contur arbitrar încărcată cu: a) forță concentrată; b) sarcină uniform distribuită.

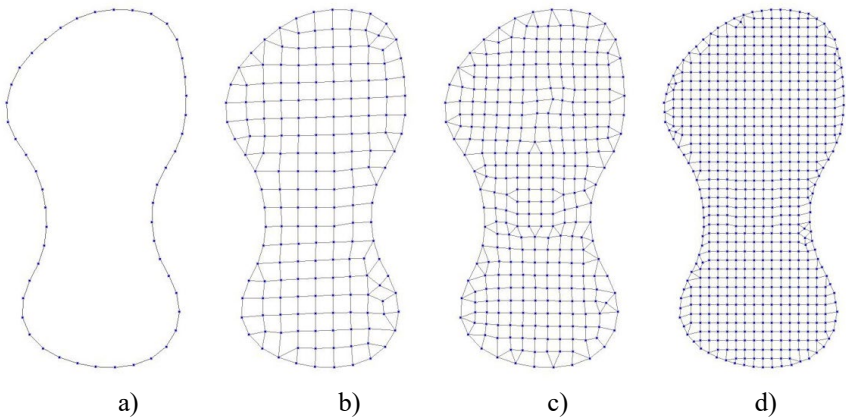


Fig. 3.7. Modele de plăci: a) BEM – 50 elem.; b) FEM – 165 elem. (182 noduri); c) FEM – 321 elem. (320 noduri); d) FEM – 641 elem. (663 noduri).

Caz I. Placă de contur arbitrar solicitată de o forță concentrată (Fig. 3.6., a). Cu ajutorul programului Dissol pentru modelul MEFr a fost obținut câmpul săgeții (Fig. 3.8., a). Pentru cele 3 modele MEF, câmpul săgeții a fost obținut cu ajutorul sfului SCAD Office (Fig. 3.8., b, c, d).

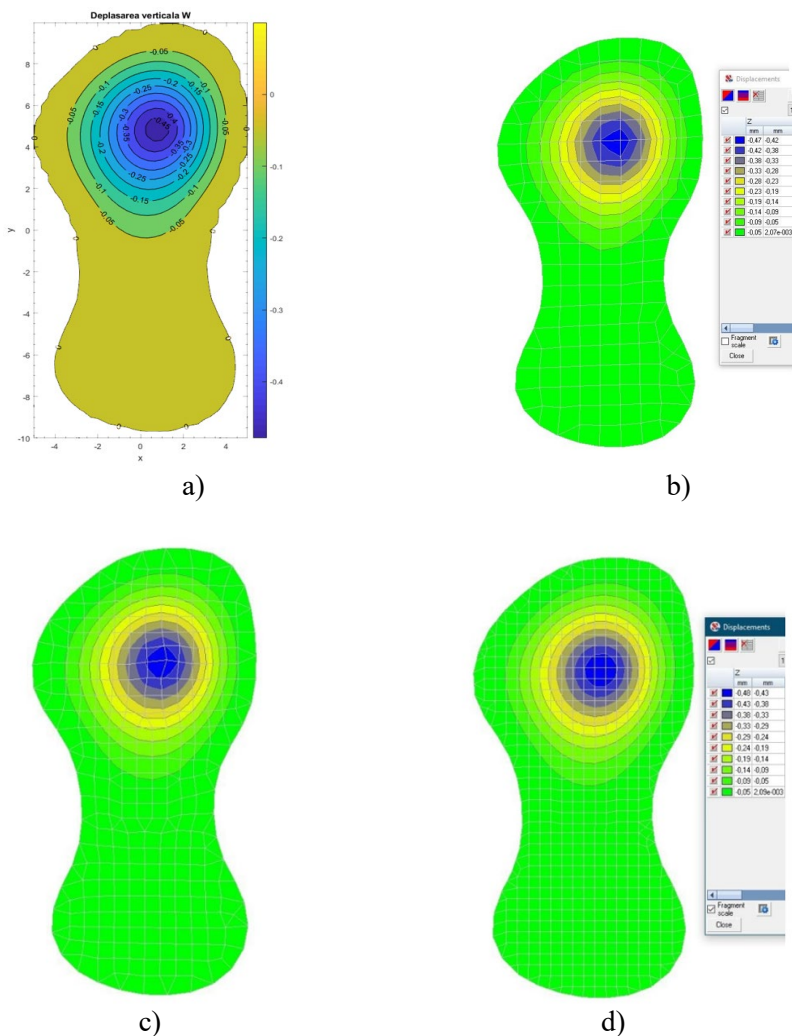


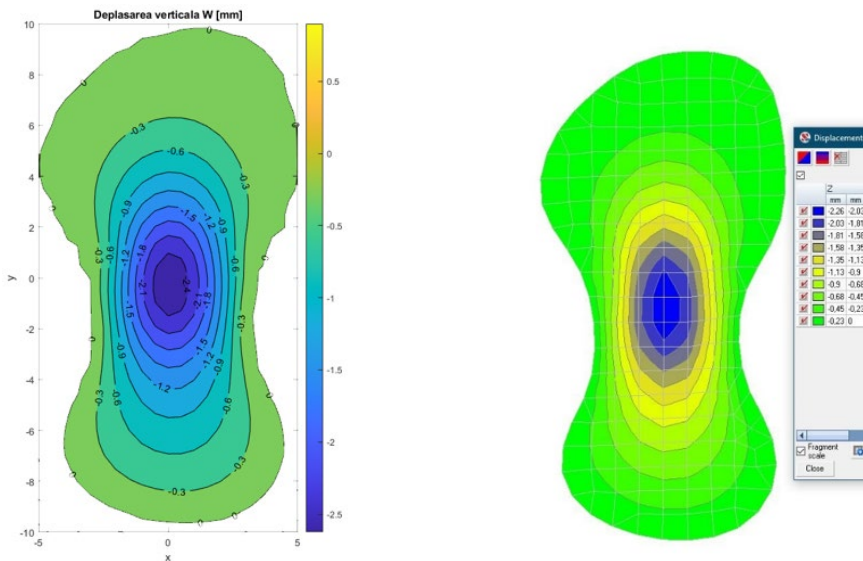
Fig. 3.8. Câmpul săgeții provenit de la o forță concentrată: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem.; c) MEF – 321 elem.; d) MEF – 641 elem.

Rezultatele obținute au fost introduse în Tabelul 1. Acesta conține valorile maxime ale săgeții și devierile în modelele FEM față de modelul MEFr.

Tabelul 3.1. Valorile maxime ale săgeții W pentru o placă de contur arbitrar de la acțiunea unei forțe concentrate.

Metoda numerică	Nr. de elemente	Dimensiunea matricei globale	Săgeata maximă W_{max} [mm]	Devieri față de MEFr [%]
MEFr	50	100	0.4783	-
MEF (i)	165	840	0.4702	1.69
MEF (ii)	321	0.4738	0.94	
MEF (iii)	641	3476	0.4767	0.33

Caz II. Placă de contur arbitrar solicitată de o sarcină distribuită uniform pe o suprafață. (Fig. 3.6., b). Câmpul deplasărilor obținut prin ambele metode este prezentat în Fig. 3.9.



a)

b)

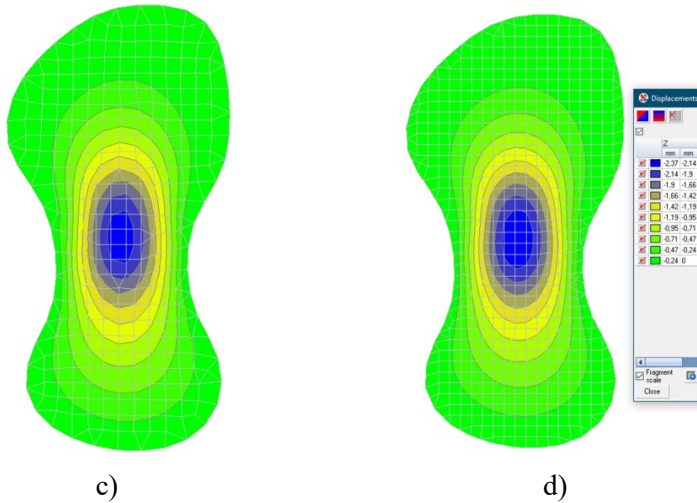


Fig. 3.9. Câmpul săgeții de la acțiunea unei sarcini uniform distribuite:
a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem.; c) MEF – 321 elem.; d) MEF – 641 elem.

Tabelul 3.2. Valorile maxime ale săgeții W pentru o placă de contur arbitrar de la acțiunea unei sarcini uniform distribuite pe o suprafață.

Metoda numerică	Nr. de elemente	Dimensiunea matricei globale	Săgeata maximă W_{max} [mm]	Devieri față de MEFr [%]
MEFr	50	100	2.520	-
MEF (i)	165	840	2.258	10.0
MEF (ii)	321	1668	2.300	8.70
MEF (iii)	641	3476	2.375	5.75

Din Fig. 3.8 și Fig. 3.9, se observă că pentru modelele MEF cu un număr relativ redus de elemente, curbele săgeții, în special în zonele de acțiune a sarcinii, prezintă niște forme poligonale, iar pentru modelele MEF cu rețele mai dense, curbele devin mai regularizate, iar rezultatele se apropie de cele obținute cu modelele MEFr. În al doilea caz de încărcare (Tabelul 3.2), pentru a obține o precizie acceptabilă, modelele MEF necesită rezolvarea unui sistem masiv de ecuații liniare (3476 ec.), de zeci de ori mai mare decât modelele MEFr (100 ec.). De asemenea, în procesul de discretizare a conturului curbiliniu apare problema aproximării geometriei, care presupune utilizarea elementelor neregulate (triunghiulare, patrulatere etc.), care pot afecta precizia rezultatelor în elementele învecinate. În MEFr, datorită faptului că soluțiile la frontieră sunt descrise numeric, iar în interior – analitic, această influență are un efect local prezent doar la conturul plăcii și nu se răspândește în interior.

CONCLUZII GENERALE

În rezultatul studiului efectuat au fost formulate următoarele *concluzii*:

1. Soluțiile discontinue în MEFr, obținute de către prof. Gh. Moraru cu ajutorul Transformării Fourier, au fost aplicate cu succes de către autor la calculul plăcilor plane cu diferite moduri de rezemare, încărcări, defecte etc., atât în interpretarea clasică cât și ținând seama de deformațiile rezultate din forfecare;
2. Au fost rezolvate un șir de integrale de frontieră. Majoritatea din acestea fiind singulare, hipersingulare sau divergente, și au fost tratate cu ajutorul metodelor de regularizare.
3. Pentru metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue a fost efectuată implementarea numerică;
4. În baza metodei propuse a fost elaborat de către autor un program de calcul în limbajul Matlab;
5. Cu ajutorul programului de calcul realizat au fost testate soluțiile obținute prin MEFr bazată pe soluții discontinue pentru plăci de diferite configurații, moduri de rezemare, încărcări, defecte etc. Rezultatele obținute au fost comparate cu cele analitice și MEF demonstrând o convergență bună, devierile fiind mai mici de 3%. De menționat, în calculul numeric prin MEFr s-au utilizat elemente de frontieră constante și într-un număr cu mult mai redus față de MEF.

RECOMANDĂRI

Soluțiile discontinue, descrise în această lucrare, s-au dovedit a fi eficiente în rezolvarea diferitor probleme ale plăcilor plane, prezentând o exactitate sporită și un șir de avantaje în comparație cu alte metode numerice.

Astfel, acestea pot fi recomandate inginerilor la rezolvarea diferitor probleme practice, care includ:

1. Calculul plăcilor: cu diferite moduri de rezemare a conturului, condiții la limită mixte, diverse tipuri de încărcări;
2. Calculul plăcilor ce prezintă defecte și concentratori de tensiuni etc.;
3. Elaborarea noilor softuri pentru calculele inginerești.

BIBLIOGRAFIE

1. DUFFY, D. G. *Green's Functions with Applications*. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001. ISBN 1-58488-110-0.
2. GALBINEAN, Sergiu. Application of discontinuous solutions in Boundary Element Method for the bending problems of Kirchhoff plates with an arbitrary contour. In: *Journal of Engineering Science*. 2023, vol. 30, nr. 2, pp 23-33. ISSN 2587-3474.
3. GALBINEAN, Sergiu. Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. In: *Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM*, vol. II. Chișinău, 2013, pp 407- 411. ISBN 978-9975-45-312-7.
4. GALBINEAN, Sergiu. Discontinuous solutions in BEM for plate analysis in Reissner-Mindlin theory. In: *International Azerbaijan Academic Research Congress*. 2022, pp 751-758. ISBN 978-605-71461-7-5.
5. GALBINEAN, Sergiu. Implimentarea numerică a metodei elementelor de frontieră. In: *Tezele Conferinței jubiliare tehnico-științifice jubiliare a colaboratorilor, doctoranzilor și studenților consacrată celei de-a 50-a aniversare a UTM*, vol. II. Chișinău, 2014, pp 202-205. ISBN 978-9975-45-382-0.
6. GALBINEAN, Sergiu. Metode numerice de calcul a plăcilor. In: *Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM*, vol. II, Chișinău, 2012, pp 107-110. ISBN 978-9975-45-251-9.
7. GALBINEAN, Sergiu. Soluții discontinue pentru calculul plăcilor în teoria clasică. In: *Akados*. 2018, vol. 1, nr. 48, pp 31-35. ISSN 1857-0461.
8. GERMAIN, Sophie. *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et equation general de ces surfaces*. Paris: Imprimerie de Huzard-Courcier, 1826.
9. HUBER, M. T. *Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten*. Warsawa: Nakkadem Akadenji Nauk Technicznych, 1929.
10. LOVE, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1892.
11. MELNICOV, Yu. A. *Influence Functions and Matrices*. New York, Bazel: Marcell Dekker, 1998. 488 p. ISBN 9780824719418.
12. MIDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1951, vol. 18, nr. 1, pp 31-38. ISSN 0021-8936.
13. MORARU, Gheorghe, MURSA, Condrat. *Teoria Elasticității*. Chișinău: Tehnica-Info, 2006. 396 p. ISBN 978-9975-63-020-7.

14. MORARU, Gheorghe. BEM based on discontinuous solutions in the theory of Kirchhoff plates on an elastic foundation. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2006, vol. 30, nr. 5, pp 382-390. ISSN 0955-7997.
15. MORARU, Gheorghe. *Discontinuous solutions in the statics of deformable bodies*. Chisinau: Tehnica-Info, 2015. 398 p. ISBN 978-9775-63-376-5.
16. MORARU, Gheorghe. *Introducere în metoda elementelor finite și de frontieră*. Chișinău: Secția de Redactare, Editare și Multiplicare a U.T.M., 2002. 176 p.
17. REISSNER, Eric. On bending of elastic plates. In: *Quarterly of Applied Mathematics*. 1947, vol. 5, nr. 1, pp 55-68. ISSN 0033569X.
18. REISSNER, Eric. On the theory of bending of elastic plates. In: *Journal of Mathematics and Physics*. 1944, vol. 23, nr. 1-4, pp 184-191. ISSN 1467-9590.
19. REISSNER, Eric. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1945, vol. 12, nr. 2, pp A69-A77. ISSN 0021-8936.
20. SHEREMET, Victor. *Handbook of Greens Functions and Matrices*. Southampton: WIT Press. ISBN 978-1-85312-933-9.
21. TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells, 2nd ed.* New York: McGraw Hill Book Company, 1959. 580 p. ISBN 0-07-064779-8.
22. VENTSEL, Eduard. An indirect boundary element method for plate bending analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997, vol. 40, nr. 9, pp 1597-1610. ISSN 1097-0207.
23. ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill, 1971. 521 p. ISBN 978-0070941380.
24. ЛУЖИН, О. В. Статический и динамический расчет балок, плит и оболочек приемом „расширения” заданной системы. В: *Исследования по теории сооружений*. 1964, вып. XIII. 1964. с. 63-76.
25. МОРАРЬ, Георге. А. *Метод разрывных решений в механике деформируемых тел*. Кишинев: Штиинца, 1990. 130 с. ISBN: 5376006387.
26. МОРАРЬ, Георге. А. Метод разрывных решений в плоской теории упругости для периодического случая. Случай параллельных дефектов. В: *Серия Математика*. 1999, том 31, с. 75-79.
27. МОРАРЬ, Георге. А. Метод разрывных решений в теории пластин Тимошенко. В: *Сер. Механика Твердого Тела*. 1989, том 2, с. 171-178.
28. МОРАРЬ, Георге. А. Метод разрывных решений в теории пластин. В: *Математические Исследования*. 1989, том 108, с. 56-62.
29. УФЛЯНД, Я. С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Ленинград: Наука, 1968. 402 с.

LISTA PUBLICAȚIILOR LA TEMA TEZEI DE DOCTOR

Articole în diferite reviste științifice

- în reviste din Registrul Național al revistelor de profil:
 1. **Galbinean, S.** Application of discontinuous solutions in Boundary Element Method for the bending problems of Kirchhoff plates with an arbitrary contour. In: *Journal of Engineering Science*, vol. 30, nr. 2, UTM, 2023, pp. 23-33. ISSN 2587-3474.
 2. **Galbinean, S.** Calculation errors of the plates using finite element method. In: *Meridian Ingineresc*, nr. 2, UTM, 2013, pp. 64-66. ISSN 1683-853X.
 3. **Galbinean, S.** Soluții discontinue pentru calculul plăcilor în teoria clasică. In: *Akados*, vol. 1, nr. 48, AȘM, 2018, pp. 31-35. ISSN 1857-0461.

Materiale / teze la forurile științifice

- conferințe naționale:
 1. **Galbinean, S.** Calculul plăcilor consolidate pe contur cu grinzi. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. I, Chișinău, 2011, pp. 391-394. ISBN 978-9975-45-208-3.
 2. **Galbinean, S.** Elaborarea programului de calcul al plăcii simplu rezemate pe două laturi opuse folosind seriile Levy. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. I, Chișinău, 2011, pp. 395-398. ISBN 978-9975-45-208-3.
 3. **Galbinean, S.** Metode numerice de calcul a plăcilor. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2012, pp. 107-110. ISBN 978-9975-45-251-9.
 4. **Galbinean, S.** Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2013, pp. 407-411. ISBN 978-9975-45-312-7.
 5. **Galbinean, S.** Implimentarea numerică a metodei elementelor de frontieră. In: tezele Conferinței jubiliare tehnico-științifice a colaboratorilor, doctoranzilor și studenților consacrată celei de-a 50-a aniversare a UTM, Vol. II, Chișinău, 2014, pp. 202-205. ISBN 978-9975-45-382-0.
- conferințe internaționale:
 1. **Galbinean, S.** Discontinuous solutions in BEM for plate analysis in Reissner-Mindlin theory. In: International Azerbaijan Academic Research Congress, 2022, pp.751-758. ISBN 978-605-71461-7-5.

ADNOTARE

Galbinean Sergiu

Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue Teză de doctor în științe tehnice Chișinău, 2024

Structura tezei: este compusă din introducere, trei capitole, concluzii generale, recomandări, bibliografie din 158 de titluri, 3 anexe, 120 de pagini de text de bază, 128 de figuri, 12 tabele. Rezultatele obținute sunt publicate în 9 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: plăci, metoda elementelor de frontieră, soluții discontinue, funcții Green.

Scopul lucrării: constă în obținerea și aplicarea soluțiilor discontinue în metoda elementelor de frontieră pentru calculul plăcilor plane.

Obiectivele cercetării: obținerea soluțiilor discontinue la calculul plăcilor plane cu diferite moduri de rezemare, încărcări defecte etc.; rezolvarea integralelor de frontieră; implementarea numerică a soluțiilor discontinue; elaborarea programelor de calcul; validarea aplicativă a metodei propuse.

Noutatea și originalitatea științifică: MEFr bazată pe soluții discontinue reprezintă o abordare nouă în mecanica corpului solid. Utilizând soluțiile discontinue pot fi rezolvate probleme pentru care metodele existente nu au soluții sau o exactitate satisfăcătoare, cum ar fi: plăci de contur arbitrar, prezența defectelor, condiții mixte la frontieră, probleme de contact, domenii infinite etc.

Rezultatele obținute care contribuie la soluționarea unei probleme științifice: constă în elaborarea și implementarea numerică a soluțiilor discontinue în MEFr, fapt ce a permis la rezolvarea unui spectru larg de probleme ale încovoierii plăcilor plane.

Semnificația teoretică: MEFr bazată pe soluții discontinue permite de a rezolva nu doar probleme ale plăcilor plane, dar poate fi aplicată și pentru alte tipuri de elemente, cum ar fi: plăci curbe, plăci în stare de tensiune sau deformație plană, membrane, corpuri tridimensionale etc.

Valoarea aplicativă: Rezultatele obținute cu ajutorul soluțiilor discontinue au fost validate prin compararea cu metodele analitice de calcul și cu MEF.

Implementarea rezultatelor științifice: Rezultatele cercetărilor au fost aplicate în cadrul proiectului de cercetare științifică cu titlul: „Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue”. Director de proiect: Moraru Gh. Perioada de realizare: 2011-2014.

АННОТАЦИЯ

Сергей Галбинян

Расчет плит методом граничных элементов на основе разрывных решений

Докторская диссертация по техническим наукам

Кишинев, 2024 г.

Структура диссертации: состоит из введения, трех глав, общих выводов, рекомендаций, библиографии из 158 наименований, 3 приложений, 120 страниц основного текста, 128 рисунков, 12 таблиц. Полученные результаты опубликованы в 9 научных статьях.

Ключевые слова: плиты, метод граничных элементов, разрывные решения, функции Грина.

Цель работы: состоит в получении и применении разрывных решений в методе граничных элементов для расчета плоских плит.

Задачи исследования: получение разрывных решений для расчета плоских пластин с различными способами опирания, загрузки, дефектами и т. д.; решение граничных интегралов; численная реализация разрывных решений; разработка расчетных программ; практическое подтверждение предложенного метода.

Научная новизна и оригинальность: МГЭ на основе разрывных решений представляет собой новый подход в механике твёрдого тела. С помощью разрывных решений можно решать задачи, для которых существующие методы не имеют решений или удовлетворительной точности, такие как: плиты произвольного контура, наличие дефектов, смешанные краевые условия, контактные задачи, бесконечные области и т.д.

Полученные результаты которые способствуют решению научной задачи: заключаются в разработке и численной реализации разрывных решений в МГЭ, что позволило решить широкий спектр задач изгиба плоских пластин.

Теоретическая значимость: МГЭ на основе разрывных решений позволяет решать не только задачи плоских пластин, но также может быть применено и для других типов элементов, например: оболочки, пластины в плоской напряжении или деформации, мембраны, трёхмерные тела и т.д.

Прикладное значение: Результаты, полученные с помощью разрывных решений, подтверждены сравнением с аналитическими методами расчета и МКЭ.

Внедрение научных результатов: Результаты исследований были применены в научно-исследовательском проекте: «Расчет плит методом граничных элементов на основе разрывных решений». Руководитель проекта: Морару Г. Срок реализации: 2011-2014 г.

ANNOTATION

Sergiu Galbinean

Plate analysis with boundary element method based on discontinuous solutions
Doctoral thesis in technical sciences
Chisinau, 2024

Structure of the thesis: it is composed of introduction, three chapters, general conclusions, recommendations, bibliography of 158 titles, 3 annexes, 120 pages of basic text, 128 figures, 12 tables. The obtained results are published in 9 scientific papers.

Keywords: plate, boundary element method, discontinuous solutions, Green's functions.

The purpose of the work: consists in obtaining and applying discontinuous solutions in the boundary element method for plate analysis.

Research objectives: to obtain discontinuous solutions for the analysis of plates with different support modes; loads, defects etc.; to solve boundary integrals; the numerical implementation of discontinuous solutions; the development of calculation programs; practical validation of the proposed method.

Scientific novelty and originality: BEM based on discontinuous solutions represents a new approach in mechanics of solid body. Using the discontinuous solutions, we can solve such problems for which the existing methods do not have solutions or a satisfactory accuracy, such as: plates of arbitrary shape, presence of defects, mixed boundary conditions, contact problems, infinite domains etc.

The obtained results that contribute to the solution of a scientific problem: consists in the development and numerical implementation of discontinuous solutions in BEM, that allowed to solve a large spectrum of plate bending problems.

Theoretical significance: BEM based on discontinuous solutions can solve not only plate bending problems, but can also be applied to other types of elements, such as: curved plates, plates in plane state of tension or deformation, membranes, three-dimensional bodies etc.

Applicative value: The obtained result using discontinuous solutions were validated by comparing with analytical methods and FEM.

Implementation of the scientific results: The research results were applied in the scientific research project with the title: "Plate analysis with boundary element method based on discontinuous solutions". Project manager: Moraru Gh. Implementation period: 2011-2014.

GALBINEAN SERGIU

**CALCULUL PLĂCILOR PRIN METODA ELEMENTELOR DE
FRONTIERĂ BAZATĂ PE SOLUȚII DISCONTINUE**

135.02. Mecanica corpului solid

Rezumatul tezei de doctor în științe ingineresti

Aprobat spre tipar: 02.05.2024

Hârtie ofset. Tipar ofset.

Coli de tipar: 2,0

Formatul hârtiei 60x84 1/16

Tiraj 50 ex

Comanda nr. 49

MD 2004, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, nr. 168, UTM.

MD 2045, Chișinău, str. Studenților 9/9, Editura „TEHNICA-UTM”