DESPRE O MATRICE DE INVERSARE A UNEI 5 – *IP* - BUCLE NESIMETRICE

Autor: Leonid URSU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *O $n-IP$ – buclă $(n\geq 2)$ se defineşte cu ajutorul matricei ei de inversare, care nu este unică. Pentru o 5-IP-buclă se defineşte matricea $[I_{ij}]$ şi se demonstrează că ea este matrice de inversare pentru această buclă.*

Cuvintele cheie: *n-buclă cu proprietate de inversare ($n-IP$ - buclă), matrice de inversare, substituţii de inversare, sistem de inversare, substituţii I_{ij}, matricea $[I_{ij}]$.*

$Q(A)$ se numeşte n - cuasigrup cu proprietate de inversare $(n-IP-cuasigrup)$ [1], dacă pe mulţimea finită Q există substituţiile ν_{ij}; $i,j\in\overline{1,n+1}$; $\nu_{ii}=\nu_{in+1}=$ E - substituţie unitară, astfel încât sunt satisfăcute egalităţile:

$$A\left(\left\{\nu_{ij}x_j\right\}_{j=1}^{i-1},A\left(x_i^n\right),\left\{\nu_{ij}x_j\right\}_{j=i+1}^{n}\right)=x_i$$

pentru orice $x_1^n\in Q^n$ şi $i\in\overline{1,n}$ şi $j\in\overline{1,n+1}$.

ν_{ij} - se numesc substituţii de inversare, iar $[\nu_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon & \nu_{12} & \nu_{13}\cdots & \nu_{1n} & \varepsilon\\ \nu_{21} & \varepsilon & \nu_{23}\cdots & \nu_{2n} & \varepsilon\\ - & - & - & - & \\ \nu_{n1} & \nu_{n2} & \nu_{n3}\cdots & \varepsilon & \varepsilon\end{bmatrix}$ se numeşte matrice de inversare pentru $Q(A)$.

Fiecare linie a acestei matrice se numeşte sistem de inversare pentru $Q(A)$.

Elementul $e\in Q$ se numeşte unitate pentru $Q(A)$, dacă $A(\overset{i-1}{e},x,\overset{n-j}{e})=x$ pentru orice $x\in Q$ şi $i\in\overline{1,n}$.
$n-IP$ - cuasigrupul cu unitate se numeşte $n-IP$ - buclă. Pentru $n=5$ obţinem $5-IP$ -buclă.

Substituţiile I_{ij} pe mulţimea Q sunt definite de egalităţile:

$$A(e^{i-1},x,\overset{j-i-1}{e},I_{ij}x,\overset{n-j}{e})=e \text{ pentru orice } x\in Q \text{ şi } i,j\in\overline{1,n}.$$

Evident că $I_{ij}e=e$. Pentru $n=5$ considerăm matricea

$$[I_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon & I_{12} & I_{13} & I_{14} & I_{15} & \varepsilon\\ I_{21} & \varepsilon & I_{23} & I_{24} & I_{25} & \varepsilon\\ - & - & - & - & - & -\\ I_{51} & I_{52} & I_{53} & I_{54} & \varepsilon & \varepsilon\end{bmatrix}$$

$5-IP$-bucla $Q(A)$ se numeşte simetrică dacă egalitatea $A\left(x_{\varphi 1}^{\varphi 5}\right)=A\left(x_1^5\right)$ are loc pentru orice $x_1^5 \in Q^5$ şi orice $\varphi \in S_n$ - grupul substituțiilor pe mulțimea Q formată din n elemente. În caz contrar, $Q(A)$ se numeşte $n-IP$ - buclă nesimetrică.

Propoziția 1: Dacă fiecare substituție la aceeaşi putere pară ale sistemului de inversare lasă pe loc unitatea e a $5-IP$ - buclei $Q(A)$, atunci aceste substituții la această putere sunt unitare.

Demonstrație: Fie fiecare substituție a primului sistem de inversare la puterea $2n,\ n \in N^*$ lasă unitatea pe loc. Atunci din $A\left(\overset{i-1}{e}, x, \overset{5-i}{e}\right)=x,$ pentru orice $x \in Q$ şi $i \in \overline{1,5},$ rezultă

$$A\left(\left\{\nu_{1j}^{2n} e\right\}_{j=1}^{i-1}, \nu_{1i}^{2n} x, \left\{\nu_{ij}^{2n} e\right\}_{j=i+1}^{5}\right)=x,$$

de unde rezultă $\nu_{1j}^{2n} x = x$, adică $\nu_{1j}=\varepsilon$, fiindcă $\nu_{1j}^{2n} e = e$. Pentru celelalte patru sisteme de inversare demonstrația este analoagă.

Propoziția 2. Dacă fiecare substituție la aceeaşi putere impară ale sistemului de inversare lasă pe loc unitatea e a $5-IP$ - buclei $Q(A),$ atunci aceste substituții la aceeaşi putere impară sunt substituțiile I_{ij} respective.

Demonstrație: Fie pentru primul sistem de inversare $\nu_{1j}^{2n-1} e = e$, $n \in N^*,\ j \in \overline{1,5}$. Atunci din

$$A\left(e^{i-1}, x, e^{5-i}\right)=x,\ i \in \overline{1,5} \text{ rezultă}$$

$$A\left(x, \left\{\nu_{1j}^{2n-1} e\right\}_{j=2}^{i-1}, \nu_{1i}^{2n-1} x, \left\{\nu_{ij}^{2n-1} e\right\}_{j=i+1}^{5}\right)=e,$$

de unde

$$A\left(x, e^{i-2}, \nu_{1i}^{2n-1} x, e^{5-i}\right)=e,$$

ceea ce înseamnă că $\nu_{1i}^{2n-1} x = I_{1i} x$ pentru orice $x \in Q$ şi $i \in \overline{2,5}$. Pentru celelalte patru sisteme de inversare demonstrația este analoagă.

Substituțiile I_{ij} şi matricea $\left[I_{ij}\right]$ posedă importante proprietăți, una dintre care este proprietatea $I_{ij} e = e$. De aceea aceste substituții şi această matrice ne ajută la studierea mai profundă a $n-$ buclelor cu proprietate de inversare. Astfel a apărut întrebarea: este $\left[I_{ij}\right]$ una din matricele de inversare a unei $n-IP$ - bucle? Răspuns afirmativ la această întrebare există pentru $n-IP$ - grupuri, $n-IP$ - bucle simetrice, $n-IP$ - bucle nesimetrice cu un singur parametru de inversare, adică când substituțiile de inversare ν_{ij} coincid, pentru $3-IP$ - bucle şi $4-IP$ - bucle nesimetrice. [2]

Teoremă. Una din matricele de inversare a $5-IP$ - buclei nesimetrice este matricea $\left[I_{ij}\right]$. Pentru $n-IP$ - bucle nesimetrice, $n>5$, răspuns la întrebarea formulată încă nu există.

Bibliografie

1. Belousov V.D. *n – Cuasigrupuri*. Ed. Ştiința. Chişinău, 1972 (în limba rusă).
2. Ursu L. *On one singular inversion matrix of 3-ary and 4-ary IP-loops.* The third Conference of Moldova, Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science. August, 19-23, 2014. Chisinau 2014. Proceedings IMCS – 50, p.166-169.