

# MODELUL TRANSFERULUI INTERCONEXAT DE CĂLDURĂ ȘI MASĂ LA USCAREA MATERIALELOR UMEDE ÎN CÂMP ELECTROMAGNETIC

**Adrian TODERIȚA**

*Departamentul Inginerie Mecanică, grupa: MIFSC-221, Facultatea Inginerie Mecanică,  
Industrială și Transporturi, Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău*

Autorul corespondent: Toderița Adrian, e-mail: [adrian.toderita@im.utm.md](mailto:adrian.toderita@im.utm.md)

Îndrumătorul/coordonatorul științific: **Leonid IVANOV**, conf. uiversitar, UTM  
**Igor GÎDEI**, conf. uiversitar, UTM

**Rezumat:** *Procesele de încălzire și de uscare a materialelor umede în câmp de microunde electromagnetice pot fi analizate folosind un sistem ce include ecuațiile lui Maxwell pentru descrierea fenomenelor electromagnetice și ecuațiile de conducție termică și masică pentru descrierea transferului de căldură și masă. În situațiile în care avem de-a face cu regimuri intense, este necesar să completăm acest sistem cu ecuațiile care descriu aspectele termomecanice ale problemei analizate. În lucrarea dată este prezentat modelul matematic al procesului de încălzire și uscare în câmp electromagnetic a materialelor umede, la fel și soluționarea ecuațiilor diferențiale pentru calculul câmpurilor de temperatură, umiditate și presiuni în exces la termoprosesarea acestor cu microunde. Modelul matematic al procesului de încălzire și de uscare va fi compus și analizat în această lucrare. Pentru modelul matematic materialele umede sunt considerate ca dielectrici imperfecti, a căror neomogenități structurale au dimensiuni cu mult mai mici decât lungimea de undă în mediul lor.*

**Cuvinte cheie:** *Căldură, uscare, electromagnetism, materiale, microunde*

## **Introducere**

Analizarea proceselor de încălzire și uscare a materialelor umede în câmpul electromagnetic al microundelor poate fi realizată printr-un sistem care utilizează ecuațiile lui Maxwell pentru explicarea fenomenelor electromagnetice și ecuațiile de conducție termică și de masă pentru a descrie transferul de căldură și de masă. În cazul în care condițiile implică regimuri intense, este necesar să adăugăm la acest sistem ecuațiile care acoperă aspectele termomecanice ale problemei examinate.

## **1. Modelul matematic al procesului de încălzire și de uscare a materialelor umede în camp electromagnetic**

### **1.1 Ipoteze simplificatoare**

În lucrarea data considerăm materialele care sunt încălzite în câmp electromagnetic ca materiale cu pierderi dielectrice (adică dielectrici imperfecti) a căror dimensiuni a neomogenităților structurale sunt cu mult mai mici decât lungimea de undă în mediul lor. În cazul în care permitivitatea dielectrică relativă  $\epsilon'$  și tangenta unghiului de pierderi dielectrice  $\tan \delta$  ale substanței tratate depind de temperatură, la fel de coordonate și de timp.

Cunoscând că din punct de vedere tehnic nu este complicat de a asigura încălzirea omogenă a materialului în tot volumul lui spre exemplu ,prin amestecarea mecanică ,în unele clcule se poate admite că  $\epsilon'$  și  $\tan \delta$  sunt doar funcții de timp.

Într-un interval limitat de temperatură , parametrii termofizici, care sunt implicați în ecuațiile și condițiile de unicitate care descriu transferul de căldură și masă, pot fi considerați constanți. Acest lucru înseamnă că putem opera cu valorile lor medii în acest interval.

### 1.2. Sistemul de ecuații al transferului interconexat de căldură și masă în câmp electromagnetic

$$\text{rot } H = j + \frac{\partial}{\partial \tau} (D); \quad (1)$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial}{\partial \tau} (B); \quad (2)$$

$$\text{div } D = 0; \quad (3)$$

$$\text{div } B = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \left( a_T + a_m \varepsilon \frac{r \delta}{c_M} \right) \nabla^2 T + \varepsilon \frac{a_m r}{c_M} \nabla^2 U + \varepsilon \frac{a_p c_p r}{c_M} \nabla^2 P + \frac{Q_v}{c_M \rho_M} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m \cdot \delta \cdot \nabla^2 T + a_m \nabla^2 U + a_p c_p \nabla^2 P \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -a_m \frac{\delta \cdot \varepsilon}{c_p} \nabla^2 T - a_m \frac{\varepsilon}{c_p} \nabla^2 U + a_p (1 - \varepsilon) \nabla^2 P \quad (7)$$

unde:  $E$  este vectorul intensității (V/m) și  $D$  - vectorul inducției (C/m) componentei electrice a unei electromagnetice.  $H$  și  $B$  - vectorii intensității (A/m) și inducției ( $V \cdot s/m^2$ ) componentei magnetice a unei electromagnetice,  $j$  este vectorul densității curentului electric ( $A/m^2$ ).  $T$ ,  $U$  și  $P$  sunt respectiv temperatura (K), umiditatea (kg de umezeală/kg de material uscat) și presiunea excedentară a aburului (Pa) în materialul umed;  $\tau$ -timpul (s);  $a_T$ ,  $a_m$  și  $a_p$  - coeficienții de difuzie termică ( $m^2/s$ ), masică ( $m^2/s$ ) și de barodifuzie ( $m^2/s$ ).  $\delta$ - coeficientul relativ de termodifuzie ( $K^{-1}$ );

$c_M$  și  $c_p$  - căldură masică a aerului umed și caldura materialului ( $J/(kg \cdot K)$ );  $\varepsilon$  - criteriul schimbării de fază;  $r$  - căldura latentă de vaporizare ( $J/(kg)$ );  $\rho_M$  - densitatea materialului ( $kg/m^3$ ),  $Q_v$  - puterea sursei interioare de energie ( $W/m^3$ ).

$$Q_v = 0.5 \cdot \omega \varepsilon_0 \varepsilon' t g \delta |E|^2 \quad (8)$$

unde  $\omega$  este frecvența ciclică (rad/s);  $\varepsilon_0$  - constanta electrică (F/m);  $\varepsilon'$  - permitivitatea dielectrică relativă a materialului umed;  $t g \delta$  - tangenta unghiului de pierderi dielectrice în material.

### 1.3. Condiții de unicitate

La suprafața de separație dintre mediile considerate (amestecului de abur cu aer 1 și materialul capilar-poros 2) câmpurile electromagnetice se cuplează cu ajutorul condițiilor la limită de tipul:

$$[H_2 - H_1, \mathbf{n}] = 0; [\mathbf{n}, E_2 - E_1] = 0; \mathbf{n}(D_2 - D_1) = 0; \mathbf{n}(B_2 - B_1) = 0 \quad (9)$$

în care  $\mathbf{n}$  este un vector unitar, orientat din mediul 2 în mediul 1.

Se scriu condițiile la limita de tip Fourier pentru ecuațiile transferului de căldură și masă:

$$\lambda_M (\nabla T)_n + j_q |_n + r j_m |_n = 0; \quad (10)$$

$$\lambda_M [\nabla U]_n + \frac{\delta}{c_m} \nabla T |_n + \delta \cdot \nabla P |_n + j_m |_n = 0; \quad (11)$$

$$P_n = 0, \quad (12)$$

în care  $c_m$  este capacitatea masică specifică ( $kg/(kg \cdot K)$ ); prin indicele  $n$  sunt notate valorile mărimilor respective la suprafața de separație a mediilor.

## 2 .Analiza modelului matematic

Procesele termice (încălzirea și uscarea ) sunt descrise de ecuațiile (5) - (7) și (10) - (12) în aproximația câmpului electromagnetic dat, care, la rândul său, se determină prin integrarea ecuațiilor electrodinamicii (1)-(4) și (9). Ambele probleme ,chiar și în urma adoptării ipotezelor simplificatoare de mai sus, sunt destul de complicate. Algoritmii soluționării lor poate fi următorul: după determinarea dependențelor parametrilor electro și termofizici ai materialului considerat de temperatură și umiditate (de regulă ,pe cale experimentală), timpul de termoprocesare se divide în perioade, în care acești parametri rămân constanți. În așa caz, integrarea sistemului de ecuații (1)-(4) și (9) va determina funcția sursei interioare de energie, ce va permite trecerea la soluționarea problemei transferului interconexat de căldură și masă. Integrarea ecuațiilor transferului de căldură și masă permite la rândul lor de a determina parametrii electro și termofizici ai materialului termoprocesat, care se substituiesc în intervalul de timp ulterior ,repetând această procedură pentru noi intervale de timp, până la atingerea valprilor prestabilite ale temperaturii sau a umidității materialului.

### 2.1.Calculul procesului de încălzire a materialelor în câmp de microunde

Analiza ecuațiilor (1)-(4) și (9) a arătat, că pentru asigurarea unui randament mai înalt al uscătorului cu microunde este necesară concordanța lui bună cu generatorul de microunde.

Aparatele de procesare a materialelor umede în câmpuri electromagnetice (de frecvență înaltă și supraînaltă) prezintă linii de transmisie a microundelor, umplute parțial cu dielectric imperfect (cu pierderi). În acest caz se ține cont de influența mediului respectiv asupra condiției de propagare a undei electromagnetice.

În conductorul de undă cu secțiune dreptunghiulară, umplut cu dielectric, undele normale sunt cele longitudinale de tipul  $LM_{min}$  și  $LE_{min}$

$$E_{X12} = -j \frac{K_X K_{Y12}}{\omega \varepsilon_{12}} \cos(K_X X) \cdot \sin K_{Y1,2} (b_{1,2} \mp Y) \cdot \exp[j(K_Z Z + \omega \cdot t)] \quad (13)$$

$$E_{Y1,2} = \mp j A_{1,2} \frac{K_X^2 + K_{Y1,2}^2}{\omega \varepsilon_{1,2}} \sin(K_X X) \cdot \cos K_{Y1,2} (b_{1,2} \mp Y) \cdot \exp[j(K_Z Z + \omega \cdot t)] \quad (14)$$

$$E_{Z1,2} = A \frac{K_Z + K_{1,2}}{\omega \varepsilon_{1,2}} \sin(K_X X) \cdot \cos K_{Y1,2} (b_{1,2} \mp Y) \cdot \exp[j(K_Z Z + \omega \cdot t)] \quad (15)$$

$$H_{Y1,2} = \mp j A_{1,2} K_Z \sin(K_X X) \cdot \cos K_{Y1,2} (b_{1,2} \mp Y) \cdot \exp[j(K_Z Z + \omega \cdot t)] \quad (16)$$

$$H_{X1,2} = 0 \quad (17)$$

$$H_{Z1,2} = \mp j A_{1,2} K_X \cdot \cos K_{Y1,2} (b_{1,2} \mp Y) \cdot \cos K_{Y1,2} (b_{1,2} \mp Y) \cdot \exp[j(K_Z Z + \omega \cdot t)] \quad (17)$$

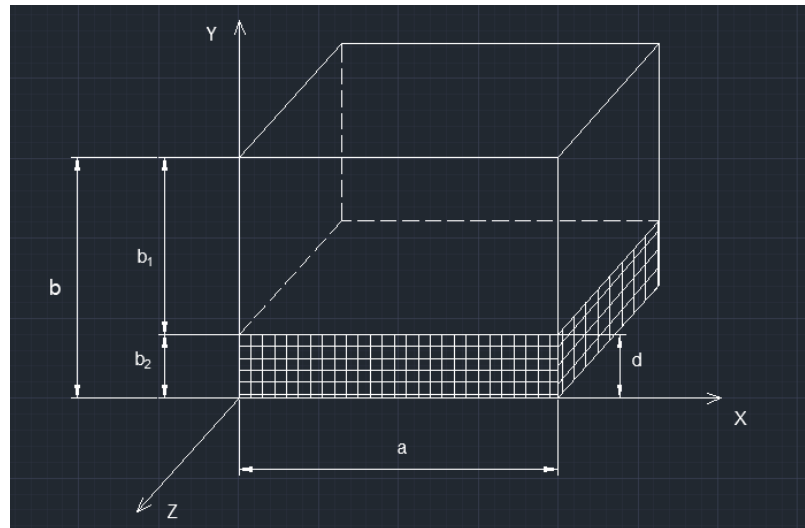
în care  $K_{12}^2 = K_X^2 + K_{Y12}^2 + K_Z^2$ ;  $K_{12} = \omega \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12}}$ ;  $K_X = m \frac{\pi}{\alpha}$ ;  $\lambda$  – lungime de undă a liniei de transmisie;  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – permitivitatea electrică și magnetică.

Constantele  $K_Z$  a undei LM se determină din ecuația de dispersie

$$\frac{K_{Y1} \varepsilon_2}{K_{Y2} \varepsilon_1} \operatorname{tg} K_{Y1} b_1 + \operatorname{tg} K_{Y2} b_2 = 0 \quad (19)$$

Dificultatea principală la soluționarea ecuațiilor transcendente prin metode numerice este apariția rădăcinii izolate și alegerea corectă a aproximației inițiale care să asigure convergența procesului iterativ. Ca aproximație inițială este rațional de ales rădăcinile ecuației (19) pentru  $tgK_{Y_2}b_2 = 0$ . Însă trebuie de avut în vedere că rădăcinile ecuației de dispersie în cazul pierderilor arbitrare au valori apropiate, când  $tgK_{Y_2}b_2 = 0$  pentru valori determinate ale mărimii  $b_2$  (spre exemplu, pentru  $LM_{1,0}$  când  $b_2 \rightarrow 0$ ).

Mult mai simplu problema concordării generatorului de microunde cu conductorul de unde cu secțiune dreptunghiulară, în care se introduce material stratificat subțire, se rezolvă în cazul propagării cvaziunde  $H_{1,0}$ . Această condiție este respectată, de regulă, când  $\epsilon' \leq 80$ ,  $d/a < 0.1$ .



**Figura 1. Schema conductorului de unde cu secțiune dreptunghiulară**

În acest caz puterea sursei interioare de energie se scrie sub forma :

$$Q_v = \frac{2\alpha P_{int}}{bd} \exp(-2\alpha \cdot X) = B \cdot e^{-KX} \quad (20)$$

în care:  $\alpha$  este coeficientul de atenuare ( $m^{-1}$ );  $P_{int}$  – puterea de intrare (W), a și b – dimensiunile conductorului; d – grosimea materialului procesat.

## 2.2. Calculul procesului de uscare

Sistemul de ecuații al transferului de căldură și masă descriu procesul de termoprosesare a materialelor și atunci, când se ține cont de schimbarea de fază [4]. Procesul de uscare a materialelor umede poate fi divizat în trei faze: faza stabilirii parametrilor de regim ai procesului, în care temperatura materialului variază esențial, umiditatea lui rămânând practic constantă; faza regimului cu viteză constantă de uscare, în care temperatura practic nu se schimbă, însă se micșorează intens umiditatea materialului; faza regimului cu viteză decadentă de uscare, în care variază atât temperatura, cât și umiditatea. În faza a treia se înlătură preponderent umezeala legată (doar în momentul inițial al acestei perioade are loc înlăturarea focarelor de umezeală liberă, prezența căreia este condiționată de diverse neomogenități, cum ar fi polidispersia structurală și grosimea variabilă a materialului, anizotropia proprietăților lui fizice etc.). În mod convențional această fază poate fi denumită uscare tehnologică finală.

Pentru calcul procesului în prima fază vom admite următoarele ipoteze: umiditatea materialului variază lent în timp și are loc încălzirea materialului, adică  $\frac{r\epsilon}{c} \cdot \frac{\partial U}{\partial \tau} \approx 0$ ; influența procesului de termodifuzie se neglijează.

În acest caz, soluțiile sistemului de ecuații (5)-(7) sunt obținute sub forma:

a) pentru câmpul de temperatură

$$T = \frac{B}{c\rho \cdot k^2 \alpha} \left\{ \frac{1-kx}{2} \left[ 1 - \phi \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \right] \cdot \exp(-kx) + \frac{1}{2} \left[ 1 - \phi \left( -\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) + k \cdot \sqrt{\alpha\tau} \right] \exp(\alpha k^2 \tau - kx) + \frac{k\sqrt{\alpha\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha\tau}\right) \right\} \quad (22)$$

b) pentru câmpul de umiditate

$$U(x, \tau) = \frac{U_0}{2} \left[ 1 + \phi \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha'_m \tau}} \right) \right] \quad (23)$$

$$\text{în care } \alpha'_m = \frac{\alpha m}{1-\varepsilon}$$

c) pentru câmpul de presiune excedentară

$$P(x, \tau) = \frac{P_0}{2} \left[ 1 + \phi \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha_p \tau}} \right) \right] \quad (24)$$

Vom analiza câmpul de temperatură (21). Pentru valori mari ale lui  $x$  din relația obținută poate fi scrisă sub forma

$$T(x, \tau) = \frac{B}{c\rho \cdot k^2 \alpha} [\exp(\alpha k^2 \tau) - 1] \cdot \exp(-kx) \quad (25)$$

Pentru valori mici ale lui  $\tau$  obținem:

$$T(x, \tau) = A\tau \cdot \exp(-kx) \quad (27)$$

Relațiile obținute permit de a determina cota puterii introduse în material pentru a evita supraîncălzirea excesivă a lui.

În faza regimului cu viteză constantă de uscare, când temperatura materialului rămâne practic neschimbată, iar mărimea  $\partial U / \partial \tau$  este de asemenea constantă, cinetica procesului se descrie cu relațiile lui Lâkov [5]. Pentru această fază soluțiile sistemului (5)-(7) sunt următoarele:

a) pentru câmpul de temperatură

$$T = T_C + \frac{B}{\lambda \cdot k^2} [1 - kx - \exp(-kx)] - \frac{r\varepsilon}{\lambda} \cdot \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{x^2}{2} \quad (28)$$

transferul de masă efectuându-se doar din contul gradientului de umiditate.

b) transferul de masă la sublimare are loc din contul procesului de termodifuzie, când  $\alpha_{m2} \nabla^2 \approx 0$ ; soluția pentru câmpul de umiditate are în acest caz forma:

$$U = U_0 - \frac{\alpha_{m2} \delta \cdot \varepsilon \cdot B \tau}{\lambda \cdot \left( 1 - \varepsilon + \frac{\alpha_{m2} \delta \cdot r \cdot \varepsilon}{\lambda} \right)} \cdot \exp(-kx); \quad (29)$$

c) repartiția câmpului de presiuni excedentare pentru materiale subțiri și  $\alpha_p \nabla^2 P \approx 0$  se calculează cu relația

$$P(x, \tau) = \frac{U_0 \varepsilon}{2c_M} \cdot \left[ 1 - \phi \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha'_m \tau}} \right) \right] \quad (30)$$

### 3. Concluzii

A fost dezvoltat un set de ecuații diferențiale pentru a descrie cinetica procesului de termoprocesare a materialelor umede în câmp electromagnetic. Prin rezolvarea acestor ecuații, s-au obținut soluții pentru cazurile încălzirii și uscării materialelor în faza de stabilire a parametrilor tehnologici ai procesului, care permit calculul câmpurilor de temperatură, umiditate și presiune excedentară.

#### **Bibliografie:**

- [1] Baskakov, S.L, Osnov] electrodinamichi, Moscova: Sovetscoe radio, 1973.
- [2] Egorov, Iu.V., Ceasticino zapolnennâe preamougolinnâe volnovodî, Moscova: Sovetscoe radio, 1967.
- [3] Kazanțev, Iu.A., Electromagnitnâe volnî v dielectriceschih canalah preamaugolinogo secenia, Radiotehnica-electronica, T.15, Nr 6, 1970, p. 1140-1145.
- [4] Ermakov, S.M., Nekrutman, V.V., Sipin, A.S., Sluceainâe proțessî dlea reșenia classiceschih uravnenii matematicescoi fizichi, Moscova, 1968
- [5] Lâkov, A.V., Teoria sușchi, Moscova, 1968
- [6] Ivanov, L.D., Teplomassoobmen v proțesse dosușchi sublimaționnogo obezvoivania, Teplomassoobmen, T.6, Minsk, 1984, p. 65-68