DISPROPORȚIONALITATEA SOLUȚIEI OPTIME ÎN UNELE SISTEME RP

Ion BOLUN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Electoral systems with proportional representation when using Lijphart, Gallagher, Square deviation and d'Hondt indices are investigated. Analytical expressions for the maximal value of used criteria for the optimal solution are obtained.*

Keywords: *electoral systems, voting rules, indice of proportional reprezentation, optimal solution, disproportionality.*

1. Introducere

Caracterul în întregi al numărului de decidenți şi, de asemenea, al numărului de opțiuni în sistemele de luare decizii multiopționale prin votare cu reprezentare proporțională (RP) conduce deseori la disproporționalitatea reprezentării voinței decidenților în opțiunea finală (decizie) [1-3]. Disproporționalitatea în cauză depinde şi de regula „voturi-decizie" (VD) aplicată. Sunt formulate mai multe asemenea reguli, folosite în diverse situații sau chiar în situații similare. De rând cu alți factori care ar putea influența alegerea regulii VD pentru un caz concret, este şi cel privind disprporționalitatea soluției optime. Valoarea acesteia depinde de indicele de apreciere a disproporționalității şi, de asmenea, de regula VD folosită. Fiecare regulă VD minimizează disproporționalitatea în cauză în sensul unui anumit criteriu de optimizare [4]. Nu s-a ajuns încă la un indice de apreciere a disproporționalității universal acceptat.

În lucrare se cercetează disprporționalitatea maxim posibilă a soluției optime pentru 4 indici de apreciere a disproporționalității: Lijphart (I_L), Gallagher (I_{Ga}), Abaterii pătratice (I_{SD}) şi d'Hondt (I_H).

2. Esența celor patru indici de apreciere a disproporționalității distribuirii mandatelor

Cele mai cunoscute practici privind folosirea sistemelor de votare sunt, probabil, cele ce țin de scrutinele electorale. De aceea, în continuare, aspectele abordate privind asemenea sisteme se vor cerceta, fără a diminua din universalitate, prin prisma scrutinelor electorale cu reprezentare proporțională de liste de partid (coaliții, blocuri) – RP. Fie:

M – numărul total de mandate în organul electiv;

n – numărul de partide care au atins sau depăşit pragul electoral;

V – numărul total de voturi exprimate valabil pentru cele n partide;

V_i – numărul de voturi exprimate în favoarea partidului i, $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V$;

x_i – numărul de mandate ce se alocă partidului i, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M$; $x_i \geq 1$, $i = \overline{1,n}$.

Reprezentarea proporțională, presupune reprezentarea egală a drepturilor alegătorilor în organul electiv şi are loc (vezi, de exemplu, [1]), dacă au loc egalitățile

$$m_i = v_i, \; i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

unde $v_i = 100 \cdot V_i/V$ este procentul voturilor acumulate de partidul i, iar $m_i = 100 \cdot x_i/M$ – procentul mandatelor distribuite partidului i. Dar din cauza caracterului în întregi al mărimilor V_i şi x_i, respectarea egalităților (1), la distribuirea celor M mandate între n partide, de obicei nu se reuşeşte. Astfel, în sisteme reale, distribuirea mandatelor între partide poate fi cu abateri de la reprezentarea proporțională.

Esența celor patru indici, specificați în p. 1, este următoarea. Indicele Lijphart [2] constituie devierea absolută maximă dintre m_i şi v_i

$$I_L = \max_{i=\overline{1,n}} | v_i - m_i |. \tag{2}$$

Indicii Gallagher [3] şi Abaterii pătratice [4] sunt foarte apropiați şi se determină ca

$$I_{Ga} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2}\ ,\ I_{SD} = \sqrt{2}I_{Ga}. \tag{3}$$

Indicele D'Hondt [4] reprezintă raportul minim dintre v_i şi m_i

$$I_H = \min_{i=\overline{1,n}} \frac{v_i}{m_i}. \tag{4}$$

3. Soluţii optime şi disproporţionalitatea acestora

Cel mai favorabil, din punctul de vedere al minimizării disproporţionalităţii, este cazul distribuirii proporţionale a mandatelor, adică atunci când au loc egalităţile (1). Pentru acest caz, limita de jos pentru valoarea optimă a trei din cei patru indici cercetaţi este respectiv: $\breve{I}_L^* = \breve{I}_{Ga}^* = \breve{I}_{SD}^* = 0$, % mandate. Aici, de exemplu, I_{Ga}^* este valoarea optimă a I_{Ga}, iar $\breve{I}_{Ga}^*$ este limita de jos pentru I_{Ga}^*. Valoarea indicelui D'Hondt, în cazul distribuirii proporţionale a mandatelor, este maximă $\widehat{I}_H^* = 1$. Prezintă interes cealalltă limită a indicilor cercetaţi – limita de sus pentru indicii Lijphart, Gallagher şi Abaterii pătratice şi cea de jos pentru indicele D'Hondt.

Soluţia optimă I_{Ga}^*, în sensul **minimizării indicelui Gallagher** (6), se obţine, după cum este demonstrat în [4], conform metodei Hamilton şi

$$I_{Ga}^* = 100\sqrt{\frac{1}{2}[\sum_{j=1}^{\Delta M}(\frac{1}{M} - \frac{R_j}{V})^2 + \sum_{j=\Delta M+1}^{n}(\frac{R_j}{V})^2]}\ , \tag{5}$$

unde R_j, $j = \overline{1,\Delta M}$ sunt cele mai mari ΔM resturi din cele $\Delta V_i = V_i - Qa_i$, $i = \overline{1,n}$. Aici Q este cota Hare, $a_i = \lceil dV_i \rceil = \lceil V_i/Q \rceil$, iar $d = 1/Q$ reprezintă drepturile medii ale unui alegător în organul electiv. Să determinăm expresia pentru valoarea maximă $\widehat{I}_{Ga}^*$ a I_{Ga}^*. Deoarece $\Delta V_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, valoarea $\widehat{I}_{Ga}^*$ se obţine, după cum se poate observă din (5), pentru un aşa scrutin, în care mărimile R_j, $j = \overline{1,\Delta M}$ au valoare cât mai mică, iar mărimile R_j, $j = \overline{\Delta M + 1,n}$ - valoare cât mai mare. Luând în consideraţie că în (5) R_j, $j = \overline{1,\Delta M}$ sunt cele mai mari ΔM resturi din cele ΔV_i, $i = \overline{1,n}$, aceste condiţii se îndeplinesc atunci şi doar atunci când $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3 = \ldots = \Delta V_n$ şi, ţinând cont că

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = d\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i, \tag{6}$$

avem

$$R_i = \Delta V_i = \Delta M/(nd) = \Delta M\, Q/n,\ i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Înlocuind (7) în (5), în rezultatul unor transformări simple obţinem

$$\widehat{I}_{Ga}^*(M,n,\Delta M) = \frac{100}{M}\sqrt{\frac{\Delta M(n-\Delta M)}{2n}}. \tag{8}$$

Faţă de ΔM, funcţia $I_{Ga}^*(M,n,\Delta M)$ este una de ordinul doi, concavă şi de aceea are un singur maximum. Considerând, temporar, că ΔM este o variabilă continue, din (8) obţinem

$$\frac{\partial \widehat{I}_{Ga}^*(\Delta M)}{\partial \Delta M} = \frac{50(n-2\Delta M)}{M\sqrt{2n\Delta M(n-\Delta M)}} = 0,$$

de unde, ținând cont că ΔM este, totuşi, o variabilă în numere întregi,

$$\Delta M = \frac{1}{2}\begin{cases} n, \text{ la } n \text{ par} \\ (n-1) \text{ sau } (n+1), \text{ la } n \text{ impar} \end{cases}$$

sau, înlocuind în (8),

$$\hat{I}^*_{Ga}(M,n) = \frac{25\sqrt{2}}{M\sqrt{n}}\begin{cases} n, \text{ la } n \text{ par} \\ \sqrt{n^2 - 1}, \text{ la } n \text{ impar} \end{cases}.$$

Aşadar, disproporționalitatea maximă a soluției optime, în sensul minimizării indicelui Gallagher de distribuire a mandatelor în scrutine RP, este aproape liniar crescătoare față de valoarea raportului $\sqrt{n}/M$. Deoarece fiecare din cele n partide sunt reprezentate în organul electiv, adică $x_i \geq 1$, are loc relația $2 \leq n \leq M$; de aceea valoarea I^*_{Ga} nu poate depăşi 25 %. Deci $I^*_{Ga} \in [0; 25]$ %.

Soluția optimă, în sensul **minimizării indicelui Lijphart** (2), se obține, după cum este demonstrat în [4], de asemenea conform metodei Hamilton şi

$$I^*_L = \min \max_{i=\overline{1,n}} |v_i - m_i| = \frac{100}{V} \min \max_{i=\overline{1,n}} |\Delta V_i - \Delta x_i Q| = \frac{100}{V} \min \Delta R_k \quad (9)$$

unde ΔR_k este cel mai mare dintre ΔM cele mai mici ca valoare complemente $\Delta R_j = Q - R_j$ din cele n în total. Valoarea maximă a I^*_L ca funcție de ΔM poate fi prezentată în forma

$$\max I^*_L(M,n) = \frac{100}{V}\max(\min \Delta R_k) = \max\left\{\frac{100Q}{V}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\} = \max\left\{\frac{100}{M}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}, \quad (10)$$

unde expresia pentru max(minΔR_k) este obținută în modul următor. În (10), valoarea ΔR_k trebuie să fie cât mai mare, dar să nu depăşească oricare din mărimile ΔR_j, $j = \overline{\Delta M + 1, n}$. Totodată, deoarece voturile ΔU, pe care în urma distribuirii optime le pierd partidele $j = \overline{\Delta M + 1, n}$, sunt egale cu voturile în exces ΔR ale partidelor $j = \overline{1, \Delta M}$, obținem $\sum_{j=1}^{\Delta M - 1} \Delta R_j + \Delta R_k = \sum_{j=\Delta M+1}^{n} R_j$. De asemenea, are loc relația $\Delta M Q = \sum_{j=1}^{n} R_j$. Aceste condiții se îndeplinesc, dacă $\Delta R_j = 1$, $j = \overline{1, \Delta M - 1}$ şi $R_k = R_j$, $j = \overline{\Delta M + 1, n}$. Astfel, $\Delta MQ = (\Delta M - 1)(Q - 1) + (n - \Delta M + 1)R_k$, de unde $R_k = (Q + \Delta M - 1)/(n - \Delta M + 1)$. Se poate uşor observa că odată cu descreşterea ΔM valoarea R_k descreşte, adică valoarea $\Delta R_k = Q - R_k$ creşte. Deci, deoarece $\Delta M \geq 1$, valoarea ΔR_k este cea mai mare la $\Delta M = 1$ şi max(minΔR_k) = max$\{Q(1 - 1/n)\}$. Expresia (10) pentru $\max I^*_L(M,n)$ este crescătoare față de n şi ținând cont că $n \leq M$, avem $\max I^*_L(M) =$ $= \max\left\{\frac{100}{M}\left(1-\frac{1}{M}\right)\right\}$, care este descrescătoare față de M. Deci, ținând cont că $M \geq 2$, avem

$$\max I^*_L = \frac{100}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 25\% \quad (11)$$

şi $I^*_L \in [0; 25]\%$.

Valoarea optimă I^*_H, în sensul **minimizării indicelui d'Hondt** I_H (5), se determină, după cum este demonstrat în [4], conform expresiei

$$I^*_H = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a_1 + a_2 + ... + a_n = M \\ dU_h/(a_h + \Delta x_h), \text{ în caz contrar} \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a_1 + a_2 + ... + a_n = M \\ (a_h + dR_h)/(a_h + \Delta x_h), \text{ în caz contrar,} \end{cases} \quad (12)$$

unde U_h este numărul de voturi acumulate de partidul cu cel mai mic dintre cele $\Delta M \le n - 1$ cele mai mari raporturi $V_i/(a_i + \Delta x_i)$, iar R_h – restul de la împărțirea U_h la Q.

Dacă distribuirea optimă a mandatelor nu este proporțională, adică $I_H^* < 1$, atunci $1 \le \Delta M \le n - 1$ şi cel puțin pentru un partid are loc $x_i^* > a_i$. Să determinăm limita de jos $\breve{I}_H^*$ a I_H^*. Din (12) se poate observa că la $I_H^* < 1$, are loc $\partial I_H^* / \partial a_h > 0$, adică funcția $I_H^*(a_h)$ este crescătoare. Ținând cont că $a_h \ge 0$, pentru varianta minimă a I_H^* are loc $a_h = 0$. Totodată, la $a_h = 0$ şi ținând cont de condiția $x_i \ge 1$, $i = \overline{1,n}$, avem $\Delta x_h = 1$. Astfel, luând în considerație (12), obținem

$$\breve{I}_H^* = \min I_H^*(d, R_h) = \min \frac{a_h + dR_h}{a_h + \Delta x_h} = d \min R_h \cdot \qquad (13)$$

Să determinăm valoarea R_h pentru care se asigură $\min I_H^*$. Din (13) rezultă că aceasta trebuie să fie pe cât posibil mai mică. Dar, conform regulii VD d'Hondt, trebuie să aibă loc inegalitatea $R_h = U_h/(a_h + 1) \ge y_k = U_k/(a_k + 1)$, $k \in K$, unde K este mulțimea partidelor pentru care $x_k^* = a_k$. Deci, mărimile y_k, $k \in K$ trebuie să fie pe cât posibil mai mici şi, deoarece $\partial y_k / \partial a_k > 0$, $\Delta x_k = 0$, $x_k \ge 1$, $k \in K$, trebuie să fie $a_k = 1$, $k \in K$. Totodată, deoarece voturile ΔU, pe care în urma distribuirii optime le pierd partidele mulțimii K, sunt egale cu voturile în exces ΔR ale partidelor mulțimii J pentru care $x_j^* > a_j$, trebuie să fie şi $R_k = R_o$, $U_k = U_o$, $k \in K$. Astfel, are loc $R_h = U_o/2 = (Q + R_o)/2$, $k \in K$, de unde $R_o = 2R_h - Q$.

De asemenea, la $\Delta U = \Delta R = \text{const}$, micşorarea R_h este posibilă doar din contul creşterii R_j la $\Delta x_j = 1$, $j \in J \setminus h$. Însă, ținând cont că $\Delta x_j = 1$, $j \in J$, această creştere este limitată de sus de condiția $\max\{U_j/(a_j + 2)$, $j \in J\} = U_h/(a_h + 1) = R_h$, care, în scopul micşorării R_h, se transformă în $R_h = W_o/(a_o + 2) = (a_oQ + \Delta W_o)/(a_o + 2)$, unde $W_o = U_j$, $a_o = a_j$, $j \in J$, iar ΔW_o este restul de la împărțirea W_o la Q. Are loc $\Delta W_o = R_h(a_o + 2) - a_oQ$.

Deoarece suma tuturor celor n resturi R_i, $i = \overline{1,n}$ este egală cu ΔMQ, avem $\Delta MQ = (\Delta M - 1)\Delta W_o + R_h + (n - \Delta M)R_o = (\Delta M - 1)[R_h(a_o + 2) - a_oQ] + R_h + (n - \Delta M)(2R_h - Q)$, de unde $R_h = Q[a_o(\Delta M - 1) + n]/[a_o(\Delta M - 1) + 2n - 1]$. Are loc $\partial R_h/\partial \Delta M = n - 1 > 0$. Ținând cont că $\Delta M \ge 1$, celei mai mici valori a R_h îi corespunde $\Delta M = 1$. Astfel, $R_h = Qn/(2n - 1)$ şi, înlocuind expresia pentru R_h în (13), obținem

$$\breve{I}_H^* = \min \frac{dQn}{2n-1} = \min \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}, \text{iar } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot \qquad (14)$$

Astfel, $I_H^* \in (0{,}5; 1]$.

4. Concluzii

Sunt obținute expresiile analitice pentru valoarea indicelui de disproporționalitate în cazul distribuirii optime pentru patru asemenea indici: Lijphart, Gallagher, Abaterii pătratice şi d'Hondt. În baza acestora sunt specificate domeniile de definiție a valorilor indicilor de disproporționalitate pentru soluțiile optime. Rezultatele obținute pot fi utile la selectarea indicelui de apreciere a disproporționalității pentru sisteme cu reprezentare proporțională concrete, în funcție de situație.

Referințe

1. Michael Gallagher and Paul Mitchell. The Politics of Electoral Systems. - London: Oxford University Press, 2008. – 672 p.
2. Lijphart A. Electoral Systems and Party Systems. Oxford, Oxford University Press, 1994.
3. Gallagher M. Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems// Electoral Studies (1991), 10:1, pp. 33-51.
4. Bolun I. Algorithmization of optimal allocation of seats in PR systems. Economica, nr.3(77)/2011. - Chişinău: Editura ASEM. – pp. 137-152.