Concepte metodice în predarea cinematicii rigidului liber și supus la legături

Gheorghe COMAN

Universitatea Tehnică a Moldovei, departamentul Mecanica Teoretică,gh.coman@mail.ru

Vasile RUSU

Universitatea Tehnică a Moldovei, departamentul Mecanica Teoretică,vasile.rusu.16@mail.ru

***Abstract* — În lucrarea prezentă se propune unele concepte metodice în predarea cinematicii rigidului liber și a rigidului supus la legături, care diferă de cele cunoscute din literatura de specialitate. Deosebirea esențială este în demonstrația teoremei despre compunerea vitezelor punctelor rigidului liber și obținerea vitezei unghiulare a rigidului. Se propune o clasificare a mișcărilor particulare în baza mișcării rigidului liber, care suplimentar este supus la anumite legături. Cele propuse permit ca predarea cinematicii rigidului să devină mai simplă ,clară și strict matematic, confirmată de către studenți în decursul a mai multor ani de predare .**

Index Terms — Mișcări particulre, rigid liber, rigid supus la legături, viteza punctului, viteza unghiulară.

I. Introducere

Cinematica rigidului liber este un capitol foarte important al cinematicii. În el se rezolvă două probleme principale ale cinematicii rigidului: problema descrierii mișcării și problema determinării caracteristicilor cinematice.

Descrierea mișcării rigidului liber în majoritatea manualelor de mecanică teoretică este asemănătoare. Se stabilește numărul gradelor de libertate, se aleg parametrii de poziție,trei coordonate carteziene a unui punct arbitrar al rigidului(polul) și trei unghiuri,mai des,unghiurile lui Euler,care definesc orientația rigidului.Acești șase parametri ca funcții de timp reprezintă ecuațiile mișcării rigidului liber.

Problema determinării caracteristicilor cinematice ale rigidului liber și, în special, determinarea vitezei unghiulare și a vitezelor punctelor rigidului în diferite manuale se face în mod diferit. În linii generale se evidențiază trei metode: metoda matricială [1],[2],[3],metoda bazată pe teorema lui Euler-d'Allembert și introducerea noțiunii de unghi infinitezimal vector [4],[5] și metoda bazată pe introducerea noțiunii de vector al vitezei unghiulare prin o manipulare cu versorii axelor de coordonate și derivatele lor după timp [6],[7],[8]. În opinia noastră, aceste metode în ansamblu ,nu satisfac asemenea criterii ca simplitate,claritate,strcteţe matematică în demonstrații.

În lucrarea prezentă se propune o metodă,diferită de cele indicate mai sus și care permite ca demonstrația teoremei despre compunerea vitezelor punctelor rigidului liber să devină mult mai simplă, clară și strict matematic.

II. Determinarea vitezelor punctelor rigidului liber . Viteza unghiulară .

Să considerăm, că problema descrierii mișcării rigidului liber este rezolvată, deci sînt cunoscute ecuațiile mișcării

$$x_{1O} = x_{1O}\,(t),\; y_{1O}\,(t),\; z_{1O}\,(t),$$
$$\psi = \psi\,(t),\; \vartheta = \vartheta\,(t),\; \varphi = \varphi\,(t)\,, \qquad (1)$$

unde x_{1O} ,y_{1O}, z_{1O} - coordonatele polului O în raport cu sistemul de coordonate fix $O_1x_1y_1z_1$, iar ψ, ϑ, φ - unghiurile lui Euler ce definesc orientația sistemului Oxyz ,solidar cu rigidul, în raport cu sistemul fix. Din geometria mișcării rigidului liber rezultă ecuația vectorială

$$\mathbf{R_M}(t) = \mathbf{R_O}(t) + \mathbf{R}'_\mathbf{M}\,(t) \qquad (2)$$

unde $\mathbf{R_M}(t) = \mathbf{O_1M}$, $\mathbf{R_O}(t) = \mathbf{O_1O}$, $\mathbf{R}'_\mathbf{M}(t) = \mathbf{OM}$. Derivînd după timp expresia (2), obținem

$$\frac{d\mathbf{R_M}}{dt} = \frac{d\mathbf{R_O}}{dt} + \frac{d\mathbf{R'_M}}{dt}\ ,$$

sau

$$\mathbf{v_M} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v_{MO}}\ , \qquad (3)$$

unde $\mathbf{v_M}$ și $\mathbf{v_{MO}}$ – vitezele punctulelor M și a polului O în raport cu sistemul de coordonate $O_1x_1y_1z_1$, $\mathbf{v_{MO}}$ – viteza punctului M în raport cu polul. În virtutea ecuațiilor (1) găsim

$$\mathbf{v_O} = \frac{dx_{1O}}{dt}\mathbf{i_1} + \frac{dy_{1O}}{dt}\mathbf{j_1} + \frac{dz_{1O}}{dt}\mathbf{k_1} \qquad (4)$$

și, deci, rămîne necunoscută viteza $\mathbf{v_{MO}}$ .Acastă viteză o vom determina în mod deosebit.

Vectorul de poziție $\mathbf{R}'_\mathbf{M}$ este constant după mărime ,dar își schimbă direcția și, deci, este funcție de unghiurile lui Euler,care deasemenea sînt funcții de timp. Deci $\mathbf{R}'_\mathbf{M}$ depinde de timp în mod compus Atunci

$$\mathbf{v_{MO}} = \frac{d\mathbf{R'_M}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\, \mathbf{R}'_\mathbf{M}[\, \psi(t), \vartheta(t), \varphi(t)\,]\}.$$

Calculînd, derivata funcției compuse,obținem

$$\mathbf{v_{MO}} = \frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\ . \qquad (5)$$

Problema se reduce la determinarea vectorilor $\frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\psi}$, $\frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\varphi}$. Derivata $\frac{\partial \mathbf{R'_M}}{\partial\psi} = \lim_{\Delta\psi\to 0}\left(\frac{\Delta\mathbf{R'_M}}{\Delta\psi}\right)_{\vartheta,\varphi=\mathrm{const.}}$, indică la faptul că mărimile ce variază corespund unei rotații în jurul axei Oz_2 paralele cu O_1z_1 la unghiul ψ . Să prezentăm

$$\mathbf{R}'_\mathbf{M} = \mathbf{R}'_\mathbf{M}\,[\, s\,(\,\psi\,)]\ , \qquad (6)$$

unde s – arc al cercului , descris de extremitatea vectorului $\mathbf{R}'_\mathbf{M}$ în rotația în jurul axei Oz_2 cu unghiul ψ.Din geometria mișcării rezultă relația $s = R(\,\psi + \alpha\,)$,unde R – raza cercului, α – un unghi constant care defineşte poziţia extremităţii vectorului $\mathbf{R}'_M$ în momentul iniţial . Atunci, evident

$$\frac{\partial \mathbf{R}'_M}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathbf{R}'_M}{\partial s}\frac{ds}{d\psi} = R\boldsymbol{\tau} \qquad (7)$$

iar $\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{R}'_M}{\partial s}$ - versorul tangentei la cerc în punctul M, orientat în sensul creşterii lui ψ. Versorii $\boldsymbol{\tau}$, versorul normalei principale la cerc în punctul M $\mathbf{n}$ şi versorul axei Oz_2 $\mathbf{k_2}$ satisfac relaţia vectorială

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{n} \times \mathbf{k_2}) \ . \qquad (8)$$

Din tiunghiul vectorial **OML** ,unde L – centrul cercului pe axa Oz_2, găsim

$$R\mathbf{n} = OL\mathbf{k_2} - \mathbf{R}'_M \ . \qquad (9)$$

Substituind (8) şi (9) în (7) ,găsim

$$\frac{\partial \mathbf{R}'_M}{\partial \psi} = \mathbf{k_2} \times \mathbf{R}'_M \qquad (10)$$

În baza formulei (10) se poate formula următoarea regulă: la rotaţia unui rigid în jurul unuei axe ce trece prin un punct al rigidului, derivata parţială a vectorului de poziţie a unui punct arbitrar al rigidului după unghiul respectiv de rotaţie, este egală cu produsul vectorial dintre versorul axei şi vectorul de poziţie al punctului . Aplicînd acastă regulă la ro taţiile în jurul axelor, liniei nodurilor cu versorul **N** la unghiul ϑ, axei Oz cu versorul **k** la unghiul **φ,** găsim

$$\frac{\partial \mathbf{R}'_M}{\partial \vartheta} = \mathbf{N} \times \mathbf{R}'_M \ , \quad \frac{\partial \mathbf{R}'_M}{\partial \varphi} = \mathbf{k} \times \mathbf{R}'_M . \qquad (11)$$

Substituind (4) , (10) , (11) în (3), obţinem

$$\mathbf{v_M} = \mathbf{v_O} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_M \qquad (12)$$

unde

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\psi}{dt}\mathbf{k_2} + \frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{N} + \frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{k} \qquad (13)$$

Expresia (12) exprimă matematic teorema despre compunerea vitezelor punctelor rigidului liber, iar expresia (13) determină viteza unghiulară a rigidului liber.

Formula (13),obţinută prin procedura de mai sus,,simul tan ne poate servi ca demonstraţie la o altă teoremă a cinematicii rigidului, si anume, teorema despre compunerea a mai multe mişcări a rigidului în jurul axelor ce se intersectează într-un punct al rigidului .

În baza formulelor (12) şi (13) se determină acceleraţiile punctelor rigidului liber şi acceleraţia unghiulară .

III. CINEMATICA RIGIDULUI SUPUS PARŢIAL LA LEGĂTURI (MIŞCĂRILE PARTICULARE ALE RIGIDULUI)

În majoritate manualelor de mecanică teoretică pentru facultăţile de inginerie ,cinematica rigidului liber se studiază după ce sa studiat mişcările particulare ale rigidului . Ca regulă se studiază mişcările mai des utilizate în tehnică : mişcarea de translaţie, mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe , mişcarea elicoidală ,mişcarea plan – paralelă şi mişcarea sferică .Există şi alte mişcări particulare care nu se studiază ,deoarece nu au o utilizare în tehnică.Ar fi bine de făcut cunoştinţă şi cu alte mişcări particulare,fiindcă nu-i exclus, ca în viitor cineva să găsească aplicaţii şi la unele din aceste mişcări particulare. Un exemplu elocvent poate servi mişcarea precesională a rigidului, care datorită activităţii de pionerat al academicanului I.Bostan şi a colegilor să-i şi-a găsit o aplicaţie la reductoarele precesionale. Se cunoaşte că mişcările particulare ale rigidului pot fi obţinute sau prin solicitarea rigidului la un anumit sistem de forţe şi anumite condiţii iniţiale ale mişcării ,sau impunînd rigidul la anumite legături, care impun anumite restricţii parametrilor de poziţie a rigidului. Metoda a doua este mai simplu de realizat şi des se utilizează în tehnică.

În opinia noastră ,ţinînd cont de simplitatea metodei propuse, este mai raţional de studiat mişcările particulare ale rigidului după studierea cinematicii rigidului liber. Vom obţine mişcările particulare, supunînd rigidul liber la anumite legături, adică la anumite restricţii ai parametrilor de poziţie şi le vom numi mişcări ale rigidului supus parţial la legături. Să evidenţiem unele din mişcările rigidului parţial supus la legături.

1. Mişcarea de translaţie rectilinie , restricţii y_{1O} =const z_{1O} = const., ψ = const., ϑ =const., φ = const.,ecuaţia mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$.
2. Mişcarea de rotaţie în jurul axei fixe Oz ,restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., z_{1O} = const., ψ = const., ϑ =const., ecuaţia mişcării φ = φ (t) .
3. Mişcarea de şurub , restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., ψ = const., ϑ = const., $z_{1O} = z_{1O}(\varphi)$, ecuaţia mişcării φ = φ(t) .
4. Mişcarea de translaţie plană , restricţii z_{1O} = const., ψ = const., ϑ = const., φ = const., ecuaţia mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$.
5. Mişcarea elicoidală , restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., ψ = const., ϑ = const., ecuaţiile mişcării $z_{1O} = z_{1O}(t)$, φ = φ (t) .
6. Mişcarea precesională , restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., z_{1O} = const., ϑ = const., ecuaţiile mişcării ψ =ψ (t), φ = φ (t) .
7. Mişcarea de translaţie în spaţiu , restricţii ψ =const., ϑ = const., φ = const., ecuaţiile mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$, $z_{1O} = z_{1O}(t)$.
8. Mişcarea plan – paralelă , restricţii z_{1O} = const., ψ = const., ϑ = const., ecuaţiile mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$, φ = φ (t) .
9. Mişcarea sferică , restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., z_{1O} = const., ecuaţiile mişcării ψ = ψ (t) , ϑ = ϑ (t) , φ = φ (t) .
10. Mişcarea rectilinie – precesională , restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., ϑ = const., ecuaţiile mişcării $z_{1O} = z_{1O}(t)$, ψ = ψ (t) , φ = φ (t) .
11. Mişcarea de translaţie în spaţiu – rotaţie , restricţii ψ = const., ϑ = const., ecuaţiile mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$, $z_{1O} = z_{1O}(t)$, φ = φ (t) .
12. Mişcarea plană – precesională ,restricţii z_{1O} = const., ϑ = const., ecuaţiile mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$,ψ = ψ (t) , φ = φ (t) .
13. Mişcarea rectilinie – sferică , restricţii x_{1O} = const., y_{1O} = const., ecuaţiile mişcării $z_{1O} = z_{1O}(t)$, ψ = ψ (t) ,ϑ = ϑ (t) , φ = φ (t) .
14. Mişcarea de translaţie în spaţiu – precesională, restricţii ϑ = const., ecuaţiile mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$, $z_{1O} = z_{1O}(t)$, ψ = ψ (t) , φ = φ (t) .

15. Mişcarea plan – sferică , restricţii z_{1O} = const.,ecuaţiile mişcării $x_{1O} = x_{1O}(t)$, $y_{1O} = y_{1O}(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Caracteristiiele cinematice ale acestor mişcări se obţin din caracteriticile cinematice respective ale rigidului liber , ţinînd cont de restricţiile şi ecuaţiile mişcărilor respective ale rigidului supus parţial la legături .

IV. CONCLUZII

În opinia noastră , conceptele de predare propuse, permit ca predarea cinematicii rigidului liber să devină mai simplă, mai clară şi în acelaş timp strictă din punct de vedere matematic . Deasemenea , şi mişcarea rigidului supus parţial la legături (mişcările particulare) devin simple evidenţiate, clasificate şi studiate în mod concis cu o economie considerabilă de timp .

REFERINŢE

[1] Г. Голдстейн , Класическая механика, Наука ,Мос ква, 1975.

[2] Р. Халфман, Динамика, Наука, Москва 1972.

[3] А. Маркеев, Теоретическая механика, Наука, Мос ква,1975.

[4] Л.Лойцянский, А.Лурье, Курс теоретической механи ки, т.I, Наука, Москва ,1982.

[5] Л. Ландау, Е. Лифшиц, Механика, Наука, Москва, 1965.

[6] N. Butenin, I. Lunţ, D. Merkin , Curs de mecanică teo retică ,v.I, Editura " Lumina", Chişinău,1993.

[7] V. Caraganciu, M. Colpagiu, M. Ţopa, Mecanica teore tică, v.I, Ştiinţa, Chişinău, 1994.

[8] R. Voinea ,D. Voiculescu ,F.Simion, Introducere în me canica solidului cu aplicaţii în inginerie, Editura Acade miei Republicii Socialiste Romania,1989.