O METODĂ DE REZOLVARE A RENUMITEI PROBLEME „RUINA JUCĂTORULUI”

Pavel CIUMAC
Universitatea Tehnică a Moldovei

***Rezumat**: Rezolvând problema ce urmează se obține o ecuație cu diferențe finite. Folosind condițiile limită ale ei uşor se obține probabilitatea de succes final.*

***Cuvinte cheie**: ecuație diferențială, jucător, eveniment, probabilitate.*

Problema. Doi jucători X şi Y dispun de o sumă totală de n lei. La începutul jocului jucătorul X are k iar jucătorul Y are $n-k$ lei. Jocul constă într-un şir de partide. Cel care pierde o partidă dă un leu partenerului. Jocul continuă până când capitalul jucătorului X creşte până la n lei sau descreşte până la zero, adică până când unul din jucători se ruinează. Care este probabilitatea că X să-l ruineze pe Y.

Rezolvare. Notăm cu A evenimentul: „jucătorul X îl va ruina pe Y”. Cu B notăm evenimentul: „jucătorul X după disputarea primului joc va câştiga un leu”. Notăm cu P_k probabilitatea evenimentului A.

Folosind formula probabilității totale, avem:

$$P_k = P(A) = P(B)P(A\setminus B) + P(\overline{B})P(A\setminus \overline{B}) = pP(A\setminus B) + qP(A\setminus \overline{B}) \tag{1}$$

unde s-a înlocuit $P(B) = p$ şi $P(\overline{B}) = 1 - p = q$.

După primul joc capitalul jucătorului X va fi sau $k+1$, sau $k-1$ lei.

Atunci

$$P(A\setminus B) = P_{k+1} \text{ iar } P(A\setminus \overline{B}) = P_{k-1} \tag{2}$$

Punând (2) în (1) pentru orice $k = 1,2,...,n-1$ obținem

$$P_k = pP_{k+1} + qP_{k-1}. \tag{3}$$

Aceasta este ecuația cu diferențe finite de ordinul doi. Pentru a rezolva această ecuație folosim condițiile limită ale ei $P_0 = 0$ şi $P_n = 1$.

Aşa cum $p + q = 1$ ecuația (3) este echivalentă cu ecuația

$$pP_k + qP_k = pP_{k+1} + qP_{k-1}$$

de unde

$$P_{k+1} - P_k = \frac{q}{p}(P_k - P_{k-1}),\ k = 1,2,...,n-1. \tag{4}$$

Ținând cont de faptul că $P_0 = 0$, din (4) succesiv obținem

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

...

$$P_k - P_{k-1} = \frac{q}{p}(P_{k-1} - P_{k-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} P_1 \tag{5}$$

...

$$P_n - P_{n-1} = \frac{q}{p}(P_{n-1} - P_{n-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} P_1.$$

Adunând primele $k-1$ ecuații din (5), obținem

$$P_k - P_1 = P_1\left[\left(\frac{q}{p}\right)^1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right] \qquad \text{sau}$$

$$P_k = P_1\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)^1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right]. \tag{6}$$

Aici observăm că în paranteza pătrată avem o progresie geometrică a cărei rație este $\frac{q}{p}$. Deci (6) poate fi scrisă astfel:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)} P_1, \ daca \ \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ kP_1, \qquad daca \ \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}. \tag{7}$$

Ținând cont de faptul că $P_n = 1$, din (7) pentru $k = n$ rezultă că

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}, \ daca \ \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{1}{n}, \qquad daca \ \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases} \tag{8}$$

şi înlocuind (8) în (7) obținem probabilitatea de succes final pentru jucătorul X, şi în cazul când jocul nu este echitabil $(p \neq q)$, şi în cazul când şansele sunt egale în fiecare partidă $(p = q)$ pentru ambii jucători. Aşadar

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}, \ daca \ \ p \neq q \\ \dfrac{k}{n}, \qquad daca \ \ p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}. \tag{9}$$

Probabilitatea de succes final a jucătorului X este egală cu probabilitatea ruinării adversarului său, iar probabilitatea de ruinare a jucătorului X este egală cu probabilitatea de succes final a jucătorului Y care se obține din formula (9) schimbând respectiv $p,\ q$ şi k cu q, p şi $n-k$ şi o notăm cu Q_k.

Observație. Fizicienii au dat alt enunț acestei probleme folosind schema mersului la întâmplare a unei particule pe o axă Ox între două ecrane absorbante. La momentul t_0 particula se află în punctul $x = k$, iar la momentele $t_1,\ t_2,\ldots$ ea se deplasează cu o unitate, la dreapta cu probabilitatea p, sau la stânga cu probabilitatea $q = 1-p$ în dependență de rezultatul experimentului efectuat, că-i succes sau eşec. Experimentele se sfârşesc dacă particula ajunge prima dată în punctul $x = 0$ sau în punctul $x = n$. Aceste două puncte se numesc ecrane absorbante. Această problemă reprezintă un exemplu de lanț Markov.