DESPRE COMPLELITUDINEA SISTEMELOR DE VECTORI PROPRII ŞI ASOCIAȚI AI FASCICOLILOR DE OPERATORI

Autor: ***Ion Goriuc***

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Sunt expuse unele rezultate de completitudine a sistemelor de vectori proprii şi asociați ai unor fascicole de operatori autoadjuncți.*

Cuvinte cheie: *operatori autoadjunct, fascicul de operator, vectori proprii şi asociați, sistem complet de vectori.*

I. Fie H - un spațiu hilbertian şi γ_∞ - mulțimea operatorilor compacți în spațiul H. Vom nota prin γ_p, $p>0$, (γ_ω) mulțimea operatorilor $A\in\gamma_\infty$, astfel în cât $\sum_{n=1}^{\infty} S_n^p(A)<\infty$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}S_n(A)<\infty\right)$ unde $\{S_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ şirul valorilor proprii ale operatorului $\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$ enumerate în ordinea de descreştere, contând ordinele de multiplicitate.

Numărul λ_0 se numeşte valoarea proprie a fascicolului de operatori $L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B+C$, ($B$ şi C operatori în spațiul H) dacă există un vector $\varphi_0\neq 0$ încât $L(\lambda_0)(\varphi_0)=0$. Vectorul φ_0 se numeşte vector propriu respectiv.

Vectorii $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ se numesc asociați vectorului φ_0, dacă

$$L(\lambda_0)\varphi_k+\frac{1}{1!}\frac{\delta L(\lambda_0)}{\delta\lambda}\varphi_{k-1}+\frac{1}{2!}\frac{\delta^2 L(\lambda_0)}{\delta\lambda^2}\varphi_{k-2}=0,\ k=1,2,...,n,\ \varphi_{-1}=0.$$

Definiție. Sistemul de vectori proprii şi asociați ai fascicolului $L(\lambda)$ se numeşte dublu complet în H dacă sistemul vectorilor proprii asociați ai operatorului $\begin{pmatrix}0 & I\\ -C & -B\end{pmatrix}$ este sistem complet în spațiul $H\times H$.

Teorema 1. Dacă pentru fascicolul de operatori autoadjuncți $L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B+C$, $C>0$ este verificată una din condițiile:

1. $C\in\sigma_p$, pentru un $p<\infty$ şi $BC^{-\frac{1}{2}}\in\sigma_\infty$;
2. $BC^{-\frac{1}{2}}\in\gamma_\omega$

atunci sistemul de vectori proprii şi asociați ai fascicolului $L(\lambda)$ este dublu complet în spațiul H.

II. Fie Λ şi $\overline{\Lambda}$ o divizare a valorilor proprii λ ale fascicolului $L(\lambda)$ în două porțiuni simetrice față de axa reală. Pentru fascicolul $L(\lambda)$ există un operator compact Z încât

$$Z^2+BZ+C=0$$

şi mulțimea de valori proprii nereale ale lui Z coincide cu mulțimea Λ şi mulțimea de vectori proprii asociați ai operatorului Z corespunzători valorii lui proprii $\lambda_0\in\Lambda$ coincide cu sistemul de vectori proprii şi asociați ai fascicolului $L(\lambda)$ corespunzători valorii lui proprii λ_0. Notăm prin $\sigma_{\mathrm{Re}}(L)$ mulțimea tuturor valorilor proprii reale ale fascicolului $L(\lambda)$. Conform rezultatelor M.V. Keldîş această mulțime este finită.

Teorema 2. În condițiile teoremei 1, sistemul de vectori proprii şi asociați ai fascicolului $L(\lambda)$, corespunzători valorilor lui proprii $\lambda \in \Lambda \cup \sigma_{\mathrm{Re}}(L)$ este complet în spațiul H.

Se consideră fascicolul $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$ cu operatori autoadjuncți şi compacți în spațiul H pentru care $(Bx,x)^2 < 4(Cx,x)(x,x)$ pentru $\forall x \in H$.

Teorema 3. Dacă $\sum_{j=1}^{\infty} \left| \mathrm{Re}\, \lambda_j (L) \right| = \sum_{k-1}^{\infty} S_k (B)$, atunci sistemul de vectori proprii şi asociați ai fascicolului $L(\lambda)$ este dublu complet în spațiul H.

Teorema 4. În condițiile teoremei 3 sistemul de vectori proprii şi asociați ai fascicolului $L(\lambda)$, corespunzători valorilor lui proprii $\lambda_j \in \Lambda$ este complet în spațiul H.

În condițiile, dacă $B \geq 0$ rezultatele teoremei 3 (4) coincid cu rezultatele obținute de M.G. Green şi G.K. Langer, şi anume

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \mathrm{Re}\, \lambda_j (L) \right| = SpB .$$

Bibliografie

9. М.В. Келдыш, *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов,* Умн, 1971, т. 27, вып. 4;
10. М.Г. Крейг, Г.К. Лангер, *К теории квадратических пучков несамосопряженных операторов*, ДАН СССР, 1964, т. 154, № 6;
11. И.В. Горюк, *О полноте системы собственных и присоединенных векторов квадратичного самосопряженного пучка*, Матем. Исследования – Кишинев, Штиинца, 1972, т. 7, вып. 1.