

## LEGITĂȚĂȚILE DE VARIAȚIE A STĂRILOR DE TENSIUNE/DEFORMAȚIE ÎN MATERIALE POLICRISTALINE CU REȚEA CUBICĂ

*Vasile Marina, prof.univ.,dr.hab. Viorica Marina, conf.univ.,dr.  
Universitatea Tehnică a Moldovei*

### ÎNTRUDUCERE

Modelele structurale propuse de diferiți autori [1-3] reflectă numai variațiile deviatorilor tensorilor tensiune și deformație. Variațiile ce țin de tensorii sferici pot fi descrise numai cu ajutorul modelului structural propus în [4,5]. Spre deosebire de cele lalte modele în [4,5] se iau în considerație relațiile lui R.Hill

$$t_{ij} = \langle \bar{t}_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \bar{t}_{ij} dV, \quad (1)$$

$$d_{ij} = \langle \bar{d}_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \bar{d}_{ij} dV, \quad (2)$$

$$\langle \bar{t}_{ij} \bar{d}_{ij} \rangle = \langle \bar{t}_{nm} \rangle \langle \bar{d}_{nm} \rangle = t_{pq} d_{pq}, \quad (3)$$

unde  $V_0$  - reprezintă volumul minimal care conține un număr suficient de subelemente pentru descrierea proprietăților medii a materialului.

În baza acestor relații în [5] a fost dedusă următoarea expresie

$$\langle (\bar{t}_{ij} - t_{ij})(\bar{d}_{ij} - d_{ij}) \rangle = 0. \quad (4)$$

Expresia (4) se verifică pentru fiecare subelement, adică

$$(\bar{t}_{ij} - t_{ij})(\bar{d}_{ij} - d_{ij}) = 0 \quad (5)$$

În continuare tensorii tensiune și deformație vor fi descompuși în deviatori și tensori sferici

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ij} &= \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_0 \delta_{ij}, \\ \bar{d}_{ij} &= \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij}, \\ \bar{d}_{ij} &= \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij}, \\ d_{ij} &= \varepsilon_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

Țânând seama de (6) în (5), găsim

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}) + 3(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)(\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0) = 0 \quad (7)$$

Suplimentar la expresia (7) se utilizează următoarele relații pentru deviatori

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}). \quad (8)$$

Sistemul fundamental de ecuații (7), (8) conține un parametru intern necunoscut  $B$ , care reflectă neomogenitățile stărilor de tensiune și deformație la scara microscopică. Valoarea numerică acestui parametru se determină în baza principiului discordanței: în toate interacțiunile reale discordanțele măsurilor microscopice cu analogii lor macroscopici potriviți obțin valori extreme

$$\langle (\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}) \rangle = Extr. \quad (9)$$

### 1. RELAȚIILE PENTRU TENSIUNI ȘI DEFORMAȚII LA SCARĂ MICROSCOPICĂ PENTRU MATERIALE POLICRISTALINE CU REȚEA CUBICĂ

În domeniul reversibil relațiile între tensiuni și deformații la nivel de element de structură se admit sub formă

$$\bar{d}_{ij} = \bar{S}_{ijnm} \bar{t}_{nm}, \quad (10)$$

unde prin  $\bar{S}_{ijnm}$  este notat tensorul coeficienților de elasticitate în sistemul global de coordonate. Pentru materiale policristaline cu o singură fază tensorul  $\bar{S}_{ijnm}$  se precizează în baza relației

$$\bar{S}_{ijnm} = \bar{a}_{pi} \bar{a}_{qj} \bar{a}_{kn} \bar{a}_{lm} S_{pqkl}. \quad (11)$$

În expresia (11)  $S_{pqkl}$  reprezintă tensorul coeficienților de elasticitate în sistemul cristalografic de coordonate, iar  $\bar{a}_{pi} = \cos(\bar{x}_p, x_i)$  precizează pozițiile sistemelor cristalografice de coordonate  $\bar{x}_p$  față de sistemul global de coordonate  $x_i$ . Cele nouă componente ale matricelor  $\bar{a}_{pi}$  se exprimă prin trei variabile independente

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \cos\theta \sin\psi \sin\varphi, \\ a_{12} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\theta \cos\psi \sin\varphi, \\ a_{13} &= \sin\theta \sin\varphi, \\ a_{21} &= -\cos\psi \sin\varphi - \cos\theta \sin\psi \cos\varphi, \\ a_{22} &= -\sin\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\psi \cos\varphi, \\ a_{23} &= \sin\theta \cos\varphi, \\ a_{31} &= \sin\theta \sin\psi, \\ a_{32} &= -\sin\theta \cos\psi, \\ a_{33} &= \cos\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

unde  $\theta, \psi$  și  $\varphi$  reprezintă unghiurile lui Euler ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

Relațiile între tensiuni și deformații (10) în sistemul cristalografic de coordonate se simplifică și obțin forma

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{2S + B}{S_{11} - S_{12} + B} \bar{a}_{i1} \bar{a}_{j1} \sigma_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{t}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{t}_{nn} \delta_{ij},$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{2S + B}{S_{11} - S_{12} + B} \bar{a}_{i2} \bar{a}_{j2} \sigma_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{33} = -\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22},$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{2S + B}{2S_{44} + B} \bar{a}_{ni} \bar{a}_{mj} \sigma_{nm}, \quad i \neq j, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2S\sigma_{ij}. \quad (14)$$

În relațiile (13), (14) prin  $S_{11}, S_{12}, S_{44}$  sunt notați coeficienții independenți de elasticitate pentru cristale cu rețea cubică.

Parametru intern  $B$  și coeficientul de macroelasticitate  $S$  se determină în baza relațiilor (10) - (13). Pentru materiale policristaline cu rețea cubică în [8] au fost obținute relațiile

$$B = \sqrt{\frac{S_{44}(S_{11} - S_{12})[4S_{44} + 3(S_{11} - S_{12})]}{3S_{44} + S_{11} - S_{12}}}, \quad (15)$$

$$S = \sqrt{\frac{S_{44}(S_{11} - S_{12})(3S_{44} + S_{11} - S_{12})}{4S_{44} + 3(S_{11} - S_{12})}}. \quad (16)$$

În baza relațiilor (14), (15), (16) și (13) se precizează stările de tensiune la scara microscopică în funcție de factorul de orientare al cristalelor și starea de tensiune la scara macroscopică.

## 2. ANALIZA VARIATIILOR TENSORILOR SFERICI ÎN PROCESE REVERSIBILE

Vom stabili legitățile de variație a stărilor de tensiune la scară microscopică pentru materialul  $Mg$  policristalin, cristalele cărui se caracterizează prin următoarele constante:  $c_{11} = 29,6;$

$$c_{12} = 15,56; \quad c_{44} = 15,56 \times 10^4 \text{ MN/m}^2.$$

Tensorul sferic la scara microscopică se determină din relația

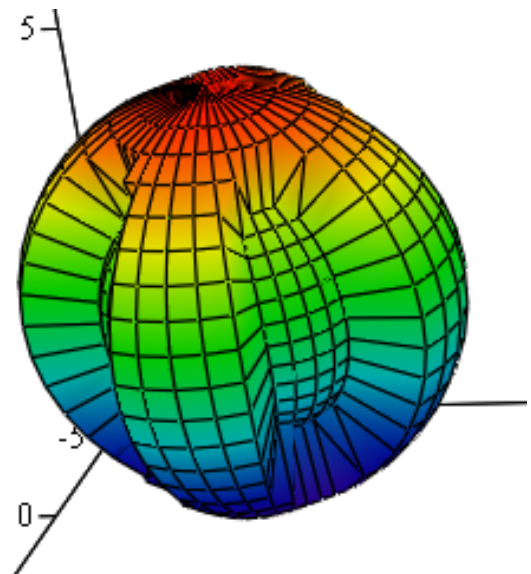
$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \begin{cases} -\sqrt{\frac{\sum_{i=j=1}^3 (\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})(\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})}{3}}, \text{daca } \bar{\sigma}(\theta_k) > \sigma \\ \sqrt{\frac{\sum_{i=j=1}^3 (\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})(\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})}{3}}, \text{daca } \bar{\sigma}(\theta_k) \leq \sigma \end{cases}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \begin{cases} -\sqrt{\frac{\sum_{i=j=1}^3 (\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})(\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})}{3}}, \text{daca } \bar{\sigma}(\theta_k) > \sigma \\ \sqrt{\frac{\sum_{i=j=1}^3 (\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})(\bar{\sigma}(\theta_k)_{ij} - \sigma(\theta_k)_{ij})}{3}}, \text{daca } \bar{\sigma}(\theta_k) \leq \sigma \end{cases} \quad (17)$$

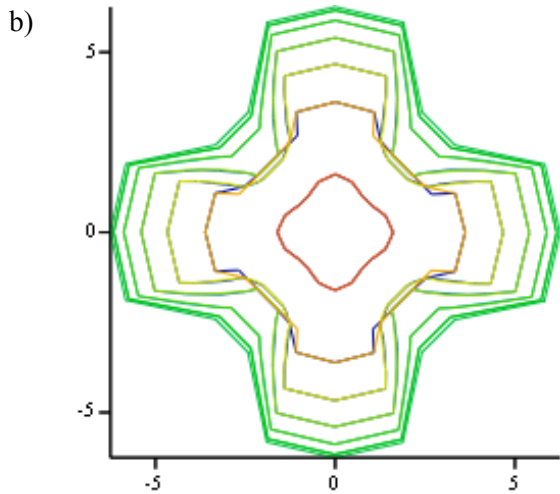
unde prin  $\theta_k$  sunt notate unghiurile lui Euler,  $\theta_1 \sim \theta, \theta_2 \sim \phi, \theta_3 \sim \psi$ .

În fig.1. sunt prezentate variațiile tensorului sferic pentru cele două variante ale relațiilor (17) în funcție de orientarea cristalelor

a)



$\sigma_{01m}$



Componentele deviatorului tensorului tensiune se determină din relațiile

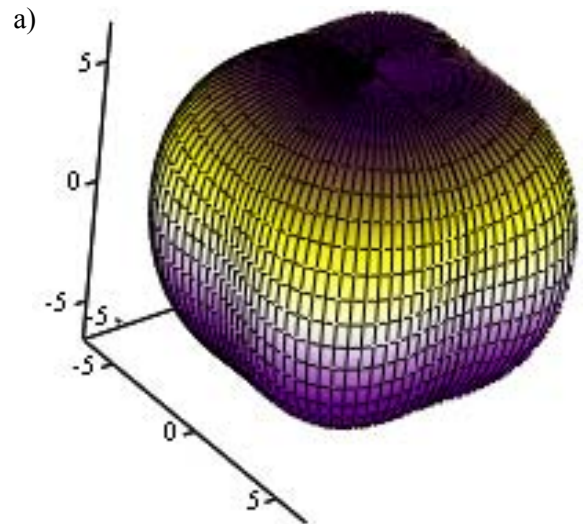
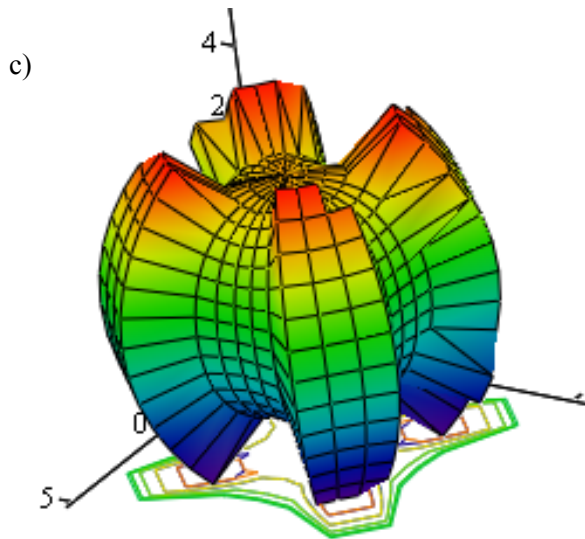
$$I_3 = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}(\theta_i)_{11} & \bar{\sigma}(\theta_i)_{12} & \bar{\sigma}(\theta_i)_{13} \\ \bar{\sigma}(\theta_i)_{21} & \bar{\sigma}(\theta_i)_{22} & \bar{\sigma}(\theta_i)_{23} \\ \bar{\sigma}(\theta_i)_{31} & \bar{\sigma}(\theta_i)_{32} & \bar{\sigma}(\theta_i)_{33} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$I_2 = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{\sigma}(\theta_i)_{ij} \bar{\sigma}(\theta_i)_{ij})}{2}, \quad (19)$$

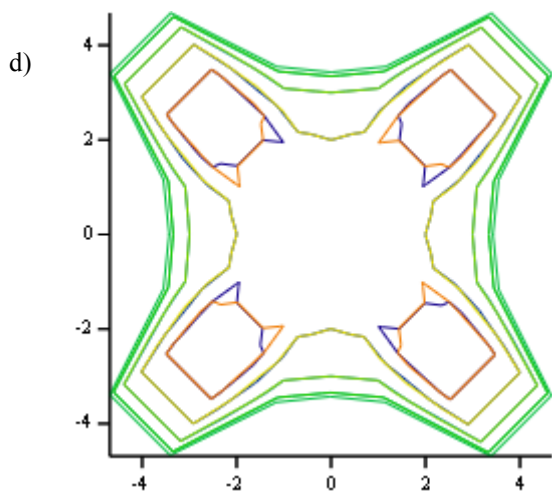
$$I_1 = 0. \quad (20)$$

În fig.2. sunt prezentate variațiile valorilor proprii ale deviatorului tensorului tensiune în funcție de orientarea cristalelor

$\sigma_{01m}$



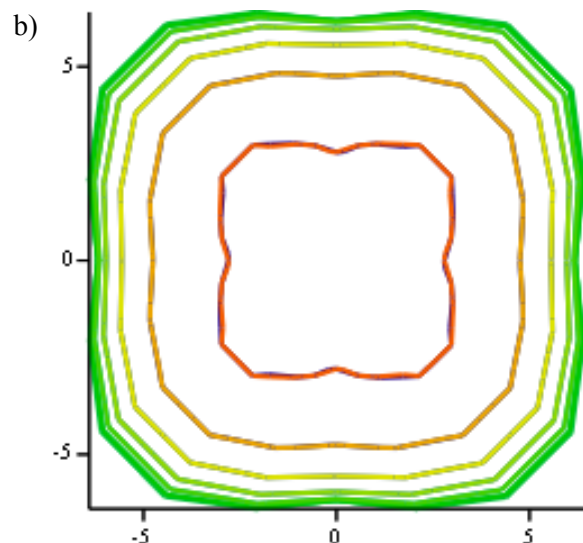
$\sigma_{01m}^1 \sigma_{01m}^1$



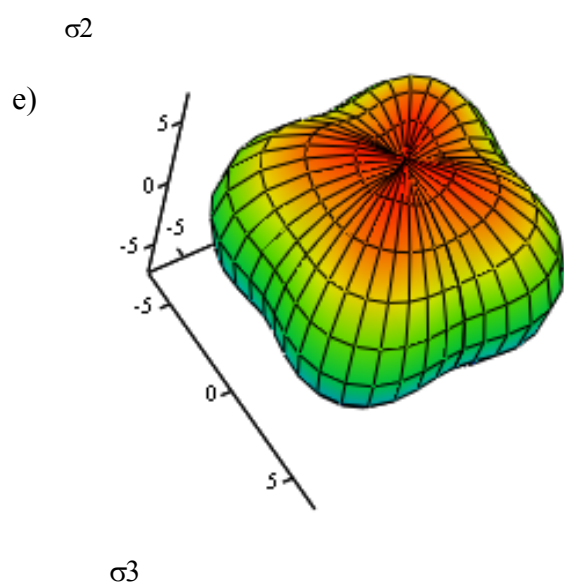
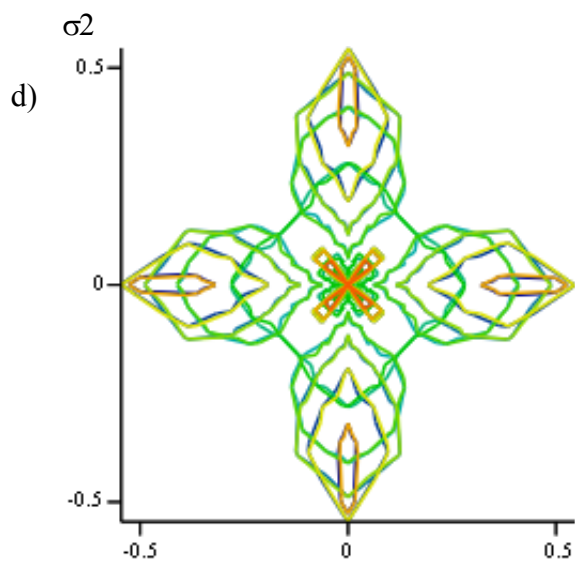
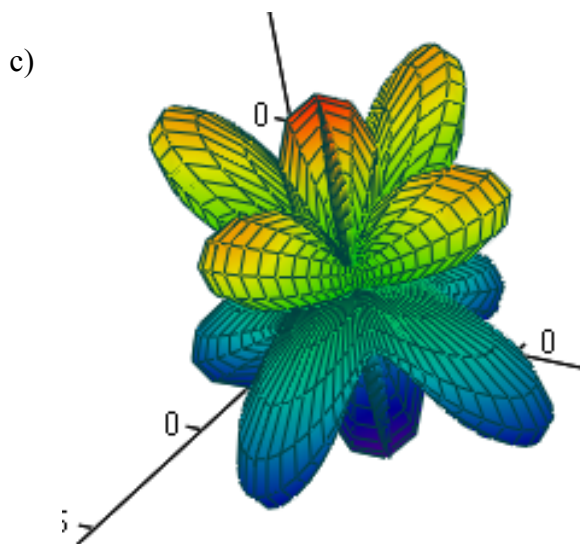
$\sigma_{01m}^1$

Figura 1. Variația tensorului sferic în funcție de orientarea cristalelor.

$\sigma_1$



$\sigma_1$

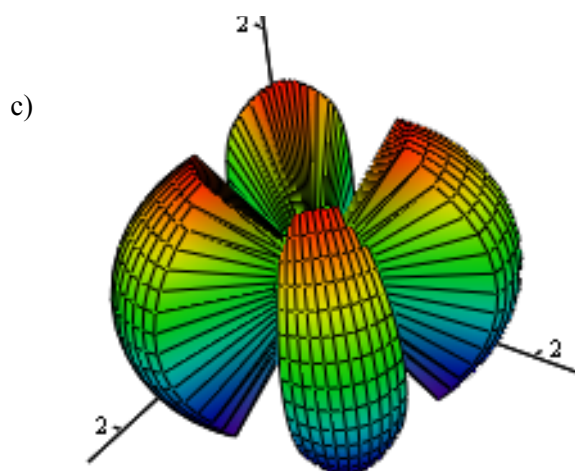
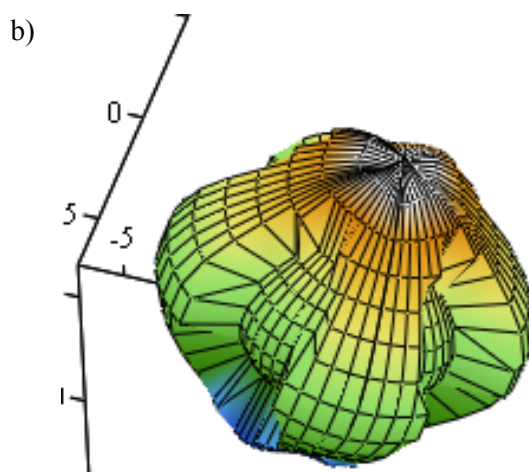
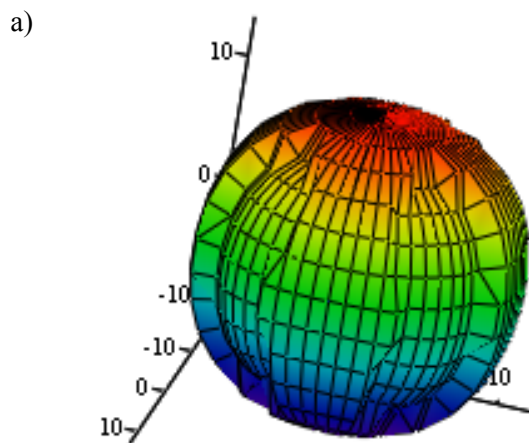


**Figura 2.** Variația valorii proprii ale deviatorului tensorului tensiune în funcție de orientarea cristalelor.

Valorile proprii ale tensorului tensiune se determină conform relațiilor

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 &= \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_0, \\ \bar{t}_2 &= \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_0, \\ \bar{t}_3 &= \bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_0. \end{aligned} \quad (21)$$

În fig.3. sunt date variațiile valorilor proprii ale componentelor tensorului tensiune în funcție de orientarea cristalelor



**Figura 3.** Variația valorii proprii ale componentelor tensorului tensiune în funcție de orientarea cristalelor.

În baza relației (7) valorile tensorilor sferici se obțin cu precizia semnului  $\pm$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 \pm \sqrt{\frac{K(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\bar{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij})}{3}}, \quad (22)$$

unde prin  $K = c_{11} + 2c_{12}$  este notat modulul de compresiune a cristalelor. Semnul în formulele (17), (22) poate fi concretizat în baza unor cercetări experimentale sau din analiza diferenței fizice ale efectelor termomecanice în procese ciclice.

## CONCLUZII

Au fost analizate legitățile de variație a stărilor de tensiune în funcție de tipul de solicitare la scară macroscopică și structura materialului. Rezultatele numerice au demonstrat că interacțiunile extrem de complexe între particulele materiale din interiorul conglomeratului provoacă un spectru larg de modificări a stărilor de tensiune la scară microscopică. În baza efectelor stabilite pot fi explicate sub o formă unitară o serie de fenomene termomecanice care din punct de vedere macroscopic au la bază cauze total diferite. Printre ele menționăm dispersarea energiei în procese de deformare elastică, care se datorează variațiilor tensorilor sferici în funcție de factorul de orientare a rețelelor cristaline.

## Bibliografie

- Kroner E.** *On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics. Gauge theory with dislocations.* *Int. J. Engng Sci.* 1, 1963. -p.261-278.
- Voigth W.** *Lehrbuch der Kristallphysik,* - Berlin: Teubner., 1928. - 962 p.
- Besseling I.F.** *Teoria plasticeskoho tecenia nacalino izotropnogo materiala, kotorii anizotropno uprocneaetsya pri plasticeskih deformacziyah,* *Mehanika,* 1991, № 2. -s. 124-168.
- Marina V.Iu.** *Mnogoelementnaia modeli sredi opisivaiushaia peremennie slojnie neizotermiceskie proczesi nagrujenia.* *Avtoreferat dissertatii doc. Fiz.-mat. Nauk. Institut Mehaniki AN Ucraini, Kiev,* 1991, 36 s.
- Marina V.** *The influence of the microheterogeneity on the metallic materials behavior during irreversible processes.* -București: *Metallurgy and new Materials Researches. Vol.II,* nr.3, 1994. -p.50-61.
- Marina V.I.** *Uravnenia uprugoplasticheskogo tela pri proportionalinom neizotermi-cheskom nagrujenii.* *Prikladnaia Mehanika,* 1997. N. 6, -s.9-17.
- Marina V.** *The principles of the Transition from a Microscopic to a Macroscopic State.* *Science of Sintering,* -Belgrad. 2000, -p.51-55.
- Marina V.** *Printipî perehoda ot micro k macro napreajenno deformirovannomu sostoianiu.* *Izv. A.N. R.M., Matematica,* 1988, N (27), s. 16-24.
- Marina V.** *Opredeleaiushhie uravnenia pri chiklicheskom proporzional'nom deformirovanii nestabil'nyh materialov.*// *Prikladnaya mexanika,* 1986, N6, s.92-99.
- Marina V.** *Printzipy` perexoda ot mikro k makro napryazhenno deformirovannomu sostoyaniyu.* *Izv. A.N. R.M., Matematica,* 1988, N (27), s. 16-24.
- Marina V.** *The Principles of the Transition from a Macroscopic to a Microscopic State//Science of SINTERING. The international journal of basic and applied sintering and related processes,* 2000, N 3, p.155-124.
- Marina V.I.** *Ob odnom novom metode opredeleniya makroskopicheskix parametrov uprugosti. Progresivny`e tehnologii i sistemy` mashinostroeniya. Mezhdunarodny`i sbornik nauchny`h trudov, vy`pusk 25, -Донецк,* 2003. - c.248-252.
- Marina V.Iu, Marina V.I.** *Oczenka vliyaniya vida nagruzenia i struktury` materiala na pole micronapryazhenij i deformaczii v ramkax strukturoj modeli sredy`, Mashinostroenie i texnosfera XXI veka. Sbornik trudov XIII Mezhdunarodnoj nauchnotexniczeskoj konferenczii,* tom 3, 2006. -s.28-34.
- Marina Viorica.** *The analyze of behavior of polycrystalline materials with cubic lattice, Research trends in mechanics, vol.3, Editura Academiei Române, - București.* 2011, -p. 227-246.
- Breto Myusso, Rei.** *Mikroneodnorodnosti plasticheskoi deformaczii i mikroskopicheskie svojstva odnofazny`h i mnogofazny`h materialov, Teoreticheskie osnovy` inzhenerny`h raschyotov,* 1984, - Moskva. Nr. 4, sc. 18-26.
- Hill R.** *On macroscopic measures of plastic work and deformation in microheterogeneous medium.* *L. Mathematical Physics.* N16, 1975, p.214.

**Recomandat spre publicare: 24.12.2015.**