CU PRIVIRE LA DESCRIEREA COMPORTĂRII MATERIALELOR POLIFAZICE CU REŢEA CRISTALINĂ CUBICĂ

V. Marina
Universitatea Tehnică a Moldovei

INTORODUCERE

Principiile de trecere de la starea microscopică la starea macroscopică pentru materiale policristaline cu o singură fază au fost enunţate în [1-3]. Unele variante de generalizare a ecuaţiilor de compoziţie în cazul materialelor cu mai multe faze au fost propuse în [4,5]. Din varianţa generalizată, în caz particular, rezultă modelul elaborat în [1-3].

În lucrare se propune un model în care pe lângă ierarhia structurală utilizată în [4,5] se introduc niveluri de structură la scară de faze. Astfel în aproximaţia statistică noţiunile fundamentale de tensiuni şi deformaţii se întroduc la trei niveluri: element de structură în faza considerată, fază, conglomerat. În schema analizată fiecare fază intereacţionează în mod direct cu conglomeratul.

Se construieşte un sistem complect de ecuaţii nelineare în baza căruia se precizează constantele de elasticitate la scară macroscopică. Este pusă în evidenţă influenţa constantelor de elasticitate la scară macroscopică şi ponderea fazelor asupra proprietăţilor conglomeratului policristalin la scară macroscopică.

1. PRINCIPIILE GENERALE DE TRECERE DE LA SCARĂ MICROSCOPICĂ LA SCARĂ MACROSCOPICĂ

La construirea unui sistem util de ecuaţii constitutive se impune un studiu concomitent al comportării materialelului la nivel de particulă materială, element de structură, fază şi conglomerat. Tensiunile şi deformaţiile la nivel de particulă materială le notăm prin $\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$; la nivel de element de structură în faza f-$\bar{t}_{ij}, \bar{d}_{ij}$ iar la nivel de fază - $t_{ij}^{(f)}, d_{ij}^{(f)}$. La scară macroscopică (la nivel de conglomerat) tensiunile se notează prin t_{ij}, iar deformaţiile d_{ij}. În baza ecuaţiilor geometrice

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (i,j = 1,2,3)$$

de echilibru

$$\tilde{t}_{ij,j} + \rho\tilde{b}_i = 0$$

şi condiţiilor de omogenitate la nivel de conglomerat

$$\tilde{u}_i \big/_{\Delta S_0} = u_i = d_{ij} x_j = const \ ,$$

$$p_i^{(n)} \big/_{\Delta S_0} = t_{ij} n_j , t_{ij} = const \ ,$$

unde prin $\tilde{u}_i$ sunt notate deplasările particulei materiale, iar prin $p_i^{(n)}$ forţele de suprafaţă, se obţin relaţiile [1]:

$$t_{ij} = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \tilde{t}_{ij} dV = \left\langle \tilde{t}_{ij} \right\rangle_{\Delta V_0} = \left\langle \tilde{t}_{ij} \right\rangle, \qquad (1.1)$$

$$d_{ij} = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \tilde{d}_{ij} dV = \left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle, \qquad (1.2)$$

$$\left\langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \right\rangle_{\Delta V_0} = \left\langle \tilde{t}_{nm} \right\rangle_{\Delta V_0} \left\langle \tilde{d}_{nm} \right\rangle_{\Delta V_0}. \qquad (1.3)$$

Dacă tensorul tensiune $\tilde{t}_{ij}$ şi deformaţie $\tilde{d}_{ij}$ se descompun în deviatori $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}$ şi tensori sferici $\tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}, \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}$:

$$\tilde{t}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}, \quad \tilde{d}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}, \qquad (1.4)$$

în mod analog la scară macroscopică

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad d_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \qquad (1.5)$$

atunci se demonstrează că

$$\sigma_{ij} = \left\langle \tilde{\sigma}_{ij} \right\rangle_{\Delta V_0} = \left\langle \tilde{\sigma}_{ij} \right\rangle, \quad \sigma_0 = \left\langle \tilde{\sigma}_0 \right\rangle \ ; \qquad (1.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \left\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \right\rangle, \quad \varepsilon_0 = \left\langle \tilde{\varepsilon}_0 \right\rangle \qquad (1.7)$$

În relaţiile (1.1)- (1.7) figurează mărimile fizice mediile cărora în conglomerat depind numai de datele de la suprafaţă. Însă după cum a fost stabilit în [1] nu toate mărimile fizice se bucură de aceasta proprietate, de exemplu

$$\left\langle \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} \right\rangle \neq \left\langle \tilde{\sigma}_{nm} \right\rangle \left\langle \tilde{\varepsilon}_{nm} \right\rangle, \quad \left\langle \tilde{\sigma}_{0}\tilde{\varepsilon}_{0} \right\rangle \neq \left\langle \tilde{\sigma}_{0} \right\rangle \left\langle \tilde{\varepsilon}_{0} \right\rangle. \quad (1.8)$$

Din (1.8) rezultă că măsura macroscopică a unor mărimi fizice nu coincide cu analogul microscopic potrivit. Diferenţa la astfel de mărimi, numită discordanţă [1-3]

$$\Delta = \left\langle \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \tilde{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \right\rangle, \quad \left\langle \tilde{t}_{ij} \right\rangle \left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle = const \ , \quad (1.9)$$

depinde nu numai de datele de pe suprafaţa conglomeratului, dar şi de structura lui.

Informaţia privind elementele de structură care pot fi descifrate din macroexperienţă se concretizează în baza principiului enunţat în lucrarea [1]: în orice interacţiune reală necorcondanţa Δ obţine valoarea extremă

$$\left\langle \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \tilde{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \right\rangle = Extr. \quad (1.10)$$

Relaţiile (1.1)- (1.10) sunt necesare dar nu şi suficiente pentru construirea ecuaţiilor constitutive la scară macroscopică în baza ecuaţiilor constitutive la scară microscopică.

2. ECUAŢIILE DE COMPOZIŢIE A INTERACŢIUNILOR ELEMENTELOR DE STRUCTURĂ ÎN CONGLOMERAT

Expresiile (1.1) - (1.3) rezultă din principiile generale ale termodinamicii, iar (1.10) reflectă o interacţiune informaţională şi ca urmare este numit principiu informaţional. Pentru a obţine un sistem complect de ecuaţii, în baza căruia se precizează relaţia dintre structură şi proprietăţi, trebuie să ţinem cont şi de fenomenul de auto-coordonare a procesului de deformaţie în conglomerat. Conform [2,3], elementele de structură în conglomerat îşi cedează unele proprietăţi individuale în contul unor proprietăţi comune. Din aceasta cauză, nu se poate trece direct de la microtensiuni şi deformaţii la macrotensiuni şi deformaţii. Fenomenul de autocoordonare a interacţiunilor termomecanice, care se produc în ierarhia nivelurilor de structură, se reflectă prin intermediul mărimilor termomecanice, definite la nivel de element de structură în faza considerată

$$\bar{t}_{ij}^{(f)} = \left\langle \tilde{t}_{ij}^{(f)} \right\rangle_{\Delta\bar{V}_f}, \quad \bar{d}_{ij}^{(f)} = \left\langle \tilde{d}_{ij}^{(f)} \right\rangle_{\Delta\bar{V}_f}, \quad (2.1)$$

unde $\Delta\bar{V}_f$ prezintă volumul elementului de strucutră şi tensiunilor şi deformaţiilor la nivel de fază

$$t_{ij}^{(f)} = \left\langle \bar{t}_{ij}^{(f)} \right\rangle_{\Delta V_f}, \quad d_{ij}^{(f)} = \left\langle \bar{d}_{ij}^{(f)} \right\rangle_{\Delta \bar{V}_f} \quad (2.2)$$

În relaţiile (2.2) prin ΔV_f este notat volumul total al fazei „*f*”.

Tensorii tensiune şi deformaţie la nivel de particula materială pot fi prezentaţi sub formă:

$$\tilde{t}_{ij}^{(f)} = t_{ij} + \Delta t_{ij}^{(f)} + \Delta\bar{t}_{ij}^{(f)} + \tilde{t}_{ij}^{(f)} \ ; \quad (2.3)$$

$$\Delta t_{ij}^{(f)} = t_{ij}^{(f)} - t_{ij}, \quad \Delta\bar{t}_{ij}^{(f)} = \bar{t}_{ij}^{(f)} - t_{ij}^{(f)}, \qquad \Delta\tilde{t}_{ij}^{(f)} = \tilde{t}_{ij}^{(f)} - \bar{t}_{ij}^{(f)}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{d}_{ij}^{(f)} = d_{ij} + \Delta d_{ij}^{(f)} + \Delta\bar{d}_{ij}^{(f)} + \Delta\tilde{d}_{ij}^{(f)} \ , \quad (2.5)$$

$$\Delta d_{ij}^{(f)} = d_{ij}^{(f)} - d_{ij}, \quad \Delta\bar{d}_{ij}^{(f)} = \bar{d}_{ij}^{(f)} - d_{ij}^{(f)}, \qquad \Delta\tilde{d}_{ij}^{(f)} = \tilde{d}_{ij}^{(f)} - \bar{d}_{ij}^{(f)}, \quad (2.6)$$

unde prin $\Delta\tilde{t}_{ij}$, $\Delta\tilde{d}_{ij}$ sunt notate fluctuaţiile tensiunilor şi deformaţiilor în particulele materiale din interiorul elementului de structură a fazei considerate $\left(\bar{t}_{ij} = const, \bar{d}_{ij} = const\right)$; $\Delta\bar{t}_{ij}^{(f)}$, $\Delta\bar{d}_{ij}^{(f)}$ reprezintă fluctuaţiile tensiunilor şi deformaţiilor la nivel de elemente de structură; $\Delta t_{ij}^{(f)}$, $\Delta d_{ij}^{(f)}$ - fluctuaţiile tensiunilor şi deformaţiilor la nivel de faze. În cele ce urmează ne vom limita la aproximaţia statistică

$$\Delta\tilde{t}_{ij}^{(f)} = 0, \quad \Delta\tilde{d}_{ij}^{(f)} = 0 \ ; \quad (2.7)$$

astfel se face abstracţie de influenţa formei şi dimensiunilor elementelor de structură.

Conform principiului enunţat în [1-5] fluctuaţiile tensiunilor la fiecare nivel de structură sunt funcţii univoce de fluctuaţiile deformaţiilor; în aproximaţie lineară au loc relaţiile

$$t_{ij}^{(f)} - t_{ij} = A_{ijnm}\left(d_{nm}^{(f)} - d_{nm}\right), \quad (2.8)$$

$$\bar{t}_{ij}^{(f)} - t_{ij}^{(f)} = A_{ijnm}^{(f)}\left(\tilde{d}_{nm}^{(f)} - d_{nm}^{(f)}\right), \qquad (2.9)$$

unde tensorii de ordinul pentru A_{ijnm}, $A_{ijnm}^{(f)}$ reflectă interacţiunile dintre faze, respectiv între elementele de structură din faza considerată. Observăm că relaţiile (2.8), (2.9) satisfac (integral) în mod automat ecuaţiile de echilibru şi relaţiile geometrice a lui Cauchy.

Substituid prezentările (2.3) şi (2.4) în aproximaţie statistică, în relaţiile fundamentale (1.3) şi (1.10) vom obţine

$$\sum_{f=1}^{N}\left(\Delta t_{ij}^{(f)}\Delta d_{ij}^{(f)} + \left\langle \Delta\bar{t}_{ij}^{(f)}\Delta\bar{d}_{ij}^{(f)}\right\rangle_{\Omega}\right)\psi^{(f)} = 0, \qquad (2.10)$$

$$\sum_{f=1}^{N}\left(\Delta\sigma_{ij}^{(f)}\varepsilon_{ij}^{(f)} + \left\langle \Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(f)}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)}\right\rangle_{\Omega}\right)\psi^{(f)} = Extr, \qquad (2.11)$$

unde prin $\psi^{(f)}$ este notată ponderea fazei „*f* ”,

$$\sum_{f=1}^{N}\psi^{(f)} = 1, \qquad (2.12)$$

iar prin $\langle\cdot\rangle_{\Omega}$ este notată operaţia de integrare după factorul de orientare. La scrierea (2.10), (2.11) s-a presupus că din punct de vedere statistic elementele de structură în interiorul unei faze, după factorul de orientare Ω sunt repartizate omogen.

În baza relaţiilor (2.2), (2.8), (2.12) se pot construi ecuaţiile constitutive la scară macroscopică, dacă sunt cunoscute relaţiile fizice la scară microscopică.

3. RELAŢIILE FIZICE

În lucrare ne vom limita la cazul comportării linear elastice a elementelor de structură în conglomerat. Astfel relaţiile fizice la scară microscopică se scriu sub forma

$$t_{ij}^{(f)} = \bar{c}_{ijnm}^{(f)}\bar{d}_{nm}^{(f)}, \qquad (3.1)$$

unde prin $\bar{c}_{ijnm}^{(f)}$ sunt notate constantele de microelasticitate în faza „*f* ”, care depind de orientarea axelor cristaline a elementului de structură considerat. Pentru elemente de structură cu cel mai simetric sistem (reţea cubică cu volum centrat sau cu feţe centrate), în care cristalizează majoritatea materialelor, componentele tensorului $\bar{c}_{ijnm}^{(f)}$ în sistemul cristalografic de coordonate se exprimă numai prin trei mărimi independente

$$c_{1111}^{(f)} \sim c_{11}^{(f)} = c_{22}^{(f)} = c_{33}^{(f)},$$
$$c_{1122}^{(f)} = c_{12}^{(f)} = c_{13}^{(f)} = c_{23}^{(f)};$$
$$c_{2323} = c_{44} = c_{55} = c_{66}.$$

Datorită acestei simetrii, relaţiile între tensiuni şi deformaţii (3.1) în sistemul cristalografic de coordonate x^{*}_{i} se reduc la trei tipuri de expresii

$$\bar{\sigma}_{11}^{(f)} = \left(c_{11}^{(f)} - c_{12}^{(f)}\right)\bar{\varepsilon}_{11}^{(f)},\ldots, \qquad (3.2)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(f)} = 2c_{44}^{(f)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)}, \quad i \neq j \qquad (3.3)$$

$$\bar{\sigma}_{0}^{(f)} = \left(c_{11}^{(f)} + 2c_{12}^{(f)}\right)\bar{\varepsilon}_{0}^{(f)}. \qquad (3.4)$$

Dacă mediul structural neordinat este statistic omogen şi izotrop pentru fiecare fază, atunci la nivel de faze şi conglomerat pot fi scrise relaţiile

$$\sigma_{ij}^{(f)} = 2G^{(f)}\varepsilon_{ij}^{(f)}, \quad \sigma_{0}^{(f)} = K^{(f)}\varepsilon_{0}^{(f)}; \qquad (3.5)$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{0} = K\ \varepsilon_{0}; \qquad (3.6)$$

unde prin $G^{(f)}$ şi $K^{(f)}$ sunt notate constantele fictive de elasticitate la nivel de fază, iar G, K_0 – conglomerat. În baza relaţiilor fizice (3.2) - (3.6) şi ecuaţiilor fundamentale (1.1), (1.2), (2.2), (2.8) - (2.12) pot fi determinate constantele de elasticitate la scară macroscopică.

4. SCHEMA DE CALCUL A MACROCONSTANTELOR DE ELASTICITATE

În ipoteza fazelor statistic omogene şi izotrope, tensorii $A_{ijnm}^{(f)}$ şi A_{ijnm} se prezintă sub formă

$$A_{ijnm}^{(f)} = A_{0}^{(f)}t_{ijnm} - A^{(f)}D_{ijnm}, \qquad (4.1)$$

$$A_{ijnm} = A_{0}t_{ijnm} - AD_{ijnm}, \ , V_{ijnm} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{nm}, \qquad (4.2)$$

$$D_{ijnm} = \frac{1}{2}\left(\delta_{in}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jn}\right) - V_{ijnm}. \qquad (4.3)$$

Ţinând seama de (1.4), (1.5) şi (4.1), (4.2) în (2.8), (2.9) stabilim următoarele expresii pentru ecuaţiile de compoziţie a intereacţiunilor, care se produc în conglomerat

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(f)} - \sigma_{ij}^{(f)} = A^{(f)}\left(\varepsilon_{ij}^{(f)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)}\right), \qquad (4.4)$$

$$\bar{\sigma}_0^{(f)} - \sigma_0^{(f)} = A_0^{(f)}\left(\bar{\varepsilon}_0^{(f)} - \varepsilon_0^{(f)}\right); \qquad (4.5)$$

$$\sigma_{ij}^{(f)} - \sigma_{ij} = A\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(f)}\right), \qquad (4.6)$$

$$\sigma_0^{(f)} - \sigma_0 = A_0\left(\varepsilon_0^{(f)} - \bar{\varepsilon}_0\right). \qquad (4.7)$$

Să stabilim la început consecinţele care rezultă din (4.4), (3.2), (3.3) şi (3.5); în sistemul cristalografic de coordonate se obţin relaţiile

$$\bar{\varepsilon}_{11}^{*(f)} = \frac{\left(A^{(f)} + 2G^{(f)}\right)\bar{a}_{1n}\bar{a}_{1m}\varepsilon_{nm}^{(f)}}{c_{11} - c_{12} + A^{(f)}} \ldots, \qquad (4.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{*(f)} = \frac{\left(A^{(f)} + 2G\right)\bar{a}_{in}\bar{a}_{jm}\varepsilon_{nm}^{(f)}}{2c_{44} + A^{(f)}}, \quad i \neq j \qquad (4.9)$$

unde prin $\bar{a}_{ij} = \cos\left(\bar{x}_i^*, x_j\right)$ sunt notate cosinusurile directoae, cu ajutorul cărora se precizează poziţia sistemului cristalografic de coordonate faţă de sistemul global. Revenind la sistemul global de coordonate

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)} = \bar{a}_{ki}\bar{a}_{qj}\bar{\varepsilon}_{kq}^{*(f)}, \qquad (4.10)$$

şi utilizând expresiile generale de integrare după factorul de orientare Ω

$$\left\langle \bar{a}_{np}\bar{a}_{mq}\bar{a}_{kc}\bar{a}_{le}\right\rangle_\Omega = \frac{1}{15}\left(2\delta_{nm}\delta_{kl} - \delta_{nk}\delta_{ml}\right)\delta_{pq}\delta_{ce} + $$

$$+ \frac{1}{15}\left(3\delta_{nk}\delta_{ml} - \delta_{nm}\delta_{kl}\right)I_{pqce}, \qquad (4.11)$$

găsim formulele, deduse pentru cazul materialelor policristaline cu o singură fază [3]

$$3\frac{2G^{(f)} + A^{(f)}}{2c_{44}^{(f)} + A^{(f)}} + 2\frac{2G^{(f)} + A^{(f)}}{c_{11}^{(f)} - c_{12}^{(f)} + A^{(f)}} = 5, \qquad (4.12)$$

$$f = 1,2,\ldots, N \qquad (4.13)$$

$$\left\langle \Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(f)}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)}\right\rangle_\Omega = -\frac{A^{(f)}}{5}\left(2\left(\frac{2G^{(f)} - c_{11}^{(f)} + c_{12}^{(f)}}{c_{11}^{(f)} - c_{12}^{(f)} + A^{(f)}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{2G^{(f)} - 2c_{44}^{(f)}}{2c_{44}^{(f)} + A^{(f)}}\right)^2\right)\varepsilon_{nm}^{(f)}\varepsilon_{nm}^{(f)},$$

Din relaţiile (3.5), (3.6) şi (4.5) stabilim expresiile pentru valorile medii ale componentelor deviatorului tensorului deformaţie în faze

$$\varepsilon_{ij}^{(f)} = \frac{A + 2G}{A + 2G^{(f)}}\varepsilon_{ij}. \qquad (4.14)$$

Ţinând seama în (4.14) că $\sum \varepsilon_{ij}^{(f)}\psi^{(f)} = \varepsilon_{ij}$ găsim relaţia de calcul pentru modulul macroscopic de forfecare

$$\left(A + 2G\right)\sum_{f=1}^{N}\frac{\psi^{(f)}}{A + 2G^{(f)}} = 1. \qquad (4.15)$$

Deoarece din (4.14) rezultă că

$$\Delta\sigma_{ij}^{(f)} = -A\Delta\varepsilon_{ij}^{(f)},$$

cu ajutorul formulei (4.14) deducem relaţia

$$\Delta\sigma_{ij}^{(f)}\Delta\varepsilon_{ij}^{(f)} = -A\Delta\varepsilon_{nm}^{(f)}\Delta\varepsilon_{nm}^{(f)} = $$

$$= -A\left(\frac{2G}{A + 2G^{(f)}}\right)^2\varepsilon_{nm}\varepsilon_{nm}. \qquad (4.16)$$

Ţinând seamă de (4.13), (4.14) şi (4.16) în (2.11) stabilim următoarea relaţie fundamentală

$$\sum_{f=1}^{N}\left(A\left(\frac{2G}{A + 2G^{(f)}}\right)^2 + \frac{A^{(f)}}{5}\left(\frac{A + 2G}{A + 2G^{(f)}}\right)^2 \times \right.$$

$$\times\left(2\left(\frac{2G^{(f)} - c_{11}^{(f)} + c_{12}^{(f)}}{c_{11}^{(f)} - c_{12}^{(f)} + A^{(f)}}\right)^2 + \right. \qquad (4.17)$$

$$\left.\left. + 3\left(\frac{2G^{(f)} - c_{44}^{(f)}}{2c_{44}^{(f)} + A^{(f)}}\right)^2\right)\right)\frac{\psi^{(f)}}{2G} = Extr$$

La scrierea expresiei (4.17) s-a ţinut seama că produsul interior al mărimilor experimentale $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ nu variază.

Astfel expresiile (2.12), (4.12), (4.15) şi (4.17) formează un sistem complet de ecuaţii neliniare în baza cărora se precizează parametri interni necunoscuţi $A^{(f)}$, A, $G^{(f)}$ şi modulul macroscopic de forfecare G, iar cum rezultă din ecuaţiile menţionate depinde numai de constantele de microelasticitate a fazelor $c_{11}^{(f)} - c_{12}^{(f)}$, $2c_{44}^{(f)}$ şi ponderea lor $\psi^{(f)}$.

În continuare vom stabili a doua constantă macroscopică de elasticitate – modulul de compresiune K. În acest scop revenim la relaţiile (3.4), (3.5), (3.6), (4.5), (4.7) şi (2.10). Integrând relaţia (3.4) găsim

$$K^{(f)} = c_{11}^{(f)} + 2c_{12}^{(f)} \tag{4.18}$$

Substituind (3.5) în (4.5) şi ţânând seama că $\overline{K}^{(f)} = K^{(f)}$ aflăm

$$\left(K^{(f)} - A_0^{(f)}\right)\left(\bar{\varepsilon}_0^{(f)} - \varepsilon_0^{(f)}\right) = 0 \tag{4.19}$$

Deoarece $\bar{\varepsilon}_0^{(f)} \neq \varepsilon_0^{(f)}$, din (4.19) deducem

$$A_0^{(f)} = K^{(f)} = c_{11}^{(f)} + 2c_{12}^{(f)} . \tag{4.20}$$

Din (4.19) rezultă că datorită egalităţii $\overline{K}^{(f)} = K^{(f)}$ fluctuaţiile tensorului sferic nu pot fi precizate în baza ecuaţiilor de compoziţie. Aceasta nedeterminare poate fi depăşită şi în bază formulei (2.10), care după descompunerea tensorilor tensiune şi deformaţie în deviatri şi tensori sferici, devine

$$\begin{gathered}\sum_{f=1}^{N}\Big(\left(\sigma_{ij}^{(f)} - \sigma_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}\right) + \\ + 3\left(\sigma_0^{(f)} - \sigma_0\right)\left(\varepsilon_0^{(f)} - \varepsilon_0\right) + \\ + \left\langle \left(\left(\bar{\sigma}_{ij}^{(f)} - \sigma_{ij}^{(f)}\right)\left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}^{(f)}\right)\right) \right\rangle_{\Omega} + \\ + \left\langle 3\left(\bar{\sigma}_0^{(f)} - \sigma_0^{(f)}\right)\left(\bar{\varepsilon}_0^{(f)} - \varepsilon_0^{(f)}\right) \right\rangle_{\Omega}\Big)\psi^{(f)} = 0.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Modelul devine complet determinat dacă vom admite că pentru fiecare element de structură are loc realaţia

$$\begin{gathered}\left(\bar{\sigma}_{ij}^{(f)} - \sigma_{ij}^{(f)}\right)\left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}^{(f)}\right) + \\ + 3\left(\bar{\sigma}_0^{(f)} - \sigma_0^{(f)}\right)\left(\bar{\varepsilon}_0^{(f)} - \varepsilon_0^{(f)}\right) = 0.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Substituind în (4.22) relaţiile (4.4), (4.5) şi ţânând seama de (4.20) stabilim expresia

$$\begin{gathered}\left(\bar{\varepsilon}_0^{(f)} - \varepsilon_0^{(f)}\right)^2 = \frac{A^{(f)}}{3K^{(f)}}\left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}^{(f)}\right) \times \\ \times \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}^{(f)}\right)\end{gathered} \tag{4.23}$$

în baza căreia se precizează variaţia tensorului sferic îm interiorul fazei considerate; mărimile $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(f)}, \varepsilon_{ij}^{(f)}$ şi $A^{(f)}$ după cum rezultă din sistemul (4.12), (4.14), (4.15), (4.17), (4.8), (4.9) sunt cunoscute.

Din (3.5), (3.6) şi (4.7) găsim

$$\varepsilon_0^{(f)} = \frac{K - A_0}{K^{(f)} - A_0}\varepsilon_0 . \tag{4.24}$$

Deoarece $\sum_{f=1}^{N}\varepsilon_0^{(f)}\psi^{(f)} = \varepsilon_0$, din (4.24) rezultă

$$\left(K - A_0\right)\sum\frac{\psi^{(f)}}{K - A_0} = 1 . \tag{4.25}$$

În expresia (4.25) figurează două necunoscute A_0 şi K; pentru a obţine un sistem complet de ecuaţii vom utiliza relaţia (4.21) din care rezultă

$$\begin{gathered}\sum_{f=1}^{N}\Big(\left(\sigma_{ij}^{(f)} - \sigma_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}\right) + \\ + 3\left(\sigma_0^{(f)} - \sigma_0\right)\left(\varepsilon_0^{(f)} - \varepsilon_0\right)\Big)\psi^{(f)}\end{gathered} \tag{4.26}$$

La scrierea formulei (4.26) s-a ţinut cont de expresia (4.22). Înlocuind în (4.26) relaţiile (4.6), (4.7) găsim

$$\begin{gathered}A\sum_{f=1}^{N}\left(\varepsilon_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(f)} - \varepsilon_{ij}\right)\psi^{(f)} = \\ = 3A_0\sum\left(\varepsilon_0^{(f)} - \varepsilon_0\right)^2\psi^{(f)}\end{gathered} \tag{4.27}$$

Cu ajutorul formulelor (4.14), (4.24) expresia (4.27) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{gathered}4\sum_{f=1}^{N}\left(\frac{G - G^{(f)}}{A + 2G}\right)\psi^{(f)} = \\ = \left[\sum_{f=1}^{N}\left(\frac{K - K^{(f)}}{K^{(f)} - A_0}\right)^2\psi_{(f)}\right]\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} .\end{gathered} \tag{4.28}$$

Expresiile (4.25), (4.28) formează un sistem complet de ecuaţii, în baza căruia se determină parametrul intern A_0 şi modulul macroscopic de compresiune K.

Din ecuaţiile obţinute rezultă că modulul macroscopic de compresiune depinde nu numia de constantele de elasticitate a elementelor de structură şi ponderea fazelor, dar şi de starea de deformaţie $\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$. În consecinţă stabilim că prezenţă mai multor faze în conglomerat provoacă efect măsurabil specific.

5. CONCLUZII

Din modelul structural analizat în lucrare rezultă că fiecare element de structură la scară microscopică provoacă un efect măsurabil la scară macroscopică. Pornind de la relaţiile stabilite între cauză şi efect, reuşim în baza experienţelor la scară macroscopică să formulăm concluzii în privinţa microstructurii materialului examinat. Dacă din macroexperienţă stabilim că starea de tensiune sau de deformaţie nu influinţează mărimea modulilor de forfecare G şi compresiune K, atunci putem afirma că materialul policristalin examinat este monofazic şi cu reţea cristalină cubică. În cazul materialului policristalin cu reţea cubică cu mai multe faze, din macroexperienţă vom constata că modulul de forfecare nu este influenţat de starea de tensiune, iar modulul de compresiune K depinde de starea de tensiune/deformaţie. Menţionăm că efectele enumerate nu rezultă din alte teorii de trecere de la starea microscopică la starea macroscopică. Pe baza efectelor neliniare stabilite în cadrul modelului structural propus de autor, se poate afirma că există o echivalenţă între problema directă, adică deducerea ecuaţiilor constitutive la scară macroscopică în baza ecuaţiilor constitutive la scară microscopică, şi problema inversă, descifrarea caracteristicilor termomecanice la scară microscopică din macroexperienţă. Observăm că problema inversă, până la descoperirea efectelor nelineare în [1-5], se considera de majoritatea specialiştilor că n-are soluţie.

Existenţa soluţiei inverse are mare importanţă practică şi ştiinţifică. Deoarece elementele de strucutră în conglomerat îşi modifică unele proprietăţi, direcţia de cunoaştere de la micro la macro, mai ales în procesele ireversibile, conduce la unele erori inevitabile la descrierea comportării conglomeratului. Aceasta consfătuire rămâne valabilă şi în problema inversă, deoarece nu toate detaliile elementelor de structură pot fi precizate din macroexperienţă. Astfel, procesul de cunoaştere va deveni mai complet dacă studiul se va efectua în ambele direcţii.

Bibliografie

1. **Marina V.** *Stat Equation under Proportional Noniothermal Loading, International Applied Mechanics, Vol.33, Nr.2, p.92-99, 1996.*
2. **Marina V.** *The principles of passing From the Microscopic state to the Macroscopic one, Metallurgy and New Materials Researches, Vol.IV, Nr.4, p. 14-28, 1998.*
3. **Marina V.** *Principy perehoda ot micro c macro napreajeonno-deformirovannomu sostoianiu, Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica, Nr.2, p.16-24, 1998.*
4. **Marina V.** *Regarding the possiilities to decode the microstructure characteristics from macro-experience, Metallurgy and New Materials Researches, Vol. X, N4, p. 1-14, 2002.*
5. **Marina V.** *Modelarea comportării neliniare şi anizotrope a unei ţesături în domeniul reversibil, Meridian Ingineresc, N 2, p.42-45, 2003.*