

## ANALIZA COMPORTĂRII DINAMICE A MAȘINILOR VIBRATOARE FOLOSITE LA TEHNOLOGIILE DE CONSTRUCȚII. PARTEA I.

P. Bratu,

Membru corespondent al Academiei de Științe Tehnice, România

### 1. ANALIZA PARAMETRIILOR DINAMICI LA MESELE VIBRATOARE PENTRU COMPACTAREA BETONULUI

Se consideră masa vibratoare rezemată elastic pe un suport fix, fiind acționată de un vibrator multidirecțional vertical, astfel încât centrul de perturbare să coincidă cu centrul de greutate al ansamblului masă vibratoare, cofraj, betoane. Modelul dinamic al sistemului fizic este prezentat în figura 1, unde legătura dintre masa vibratoare  $m_1$  și betonul de masă  $m_2$  s-a reprezentat printr-un coeficient de amortizare vâscoasă, notat cu  $b$ , iar legătura elastică de rezemare s-a notat cu  $k$ .

Se pune problema determinării următorilor parametri:

a) amplitudinile  $A_1$  și  $A_2$  ale celor două mase considerând că masa de beton se comportă ca un corp;

b) transmisibilitatea vibrațiilor forțate asupra betonului.

Se cunosc: momentul static total al vibratorului  $m_0 r$  și pulsația  $\omega$  a vibrațiilor în regim tehnologic.

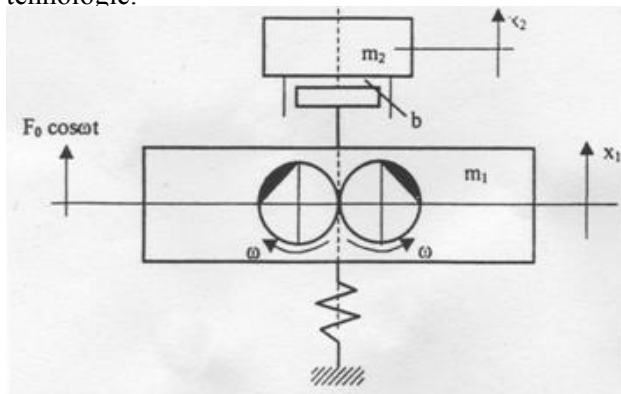


Figura 1

Energia cinetică  $E$ , de disipare  $D$  și potențială  $V$  pentru sistem, considerat în poziția inițială de echilibru static stabil, sunt

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2;$$

$$D = \frac{1}{2} b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2; V = \frac{1}{2} k x_1^2.$$

Ecuatiile lui Lagrange de speța a doua sunt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_j} = - \frac{\partial V}{\partial x_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} + Q_{jF}; \quad j = 1, 2,$$

unde:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{\partial E}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = k x_1;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2);$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2);$$

$$Q_{1F} = \frac{\delta L_F}{\delta x_1} = \frac{F_0 \delta x_1 \cos \omega t}{\delta x_1} = F_0 \cos \omega t;$$

$$Q_{2F} = \frac{\delta L_F}{\delta x_2} = 0$$

Ecuatiile lui Lagrange, în acest caz, sunt:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) = -k x_1 - b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_0 \cos \omega t \\ \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) = +b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 + b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \end{cases}$$

Alegem soluțiile de forma membrului drept ținând seama de defazajul produs de forța vâscoasă, astfel:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \end{cases}$$

Folosim formalismul numerelor complexe sub forma

$$\tilde{z} = x + j y = A \cos(\omega t - \varphi) + j A \sin(\omega t - \varphi),$$

$$\text{cu } \operatorname{Re} \tilde{z} = x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{și}$$

$j = \sqrt{-1}$  unitatea imaginară, pentru  $\tilde{z} \quad j \dot{\tilde{z}} \quad \ddot{\tilde{z}}$  rezultă

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \omega [-A \sin(\omega t - \varphi) + j A \cos(\omega t - \varphi)] = \\ &= j \omega [j A \sin(\omega t - \varphi) + A \cos(\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

$$\text{deci } \ddot{\tilde{z}} = j \omega \dot{\tilde{z}}, \text{ iar } \ddot{\tilde{z}} = j \omega (j \omega \tilde{z}) = -\omega^2 \tilde{z}.$$

Sistemul de ecuații diferențiale în complex, devine

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\tilde{z}}_1 + b (\dot{\tilde{z}}_1 - \dot{\tilde{z}}_2) + k \tilde{z}_1 = \tilde{F} \\ m_2 \ddot{\tilde{z}}_2 + b (\dot{\tilde{z}}_2 - \dot{\tilde{z}}_1) = 0 \end{cases}$$

Introducând  $\tilde{z}$  și  $\ddot{\tilde{z}}$  în sistem, obținem

$$\begin{cases} (-m_1 \omega^2 + k + b \omega j) \tilde{z}_1 - b \omega \tilde{z}_2 j = \tilde{F} \\ j \omega b \tilde{z}_1 + (-m_2 \omega^2 + j \omega b) \tilde{z}_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemul are determinantul  $\tilde{\Delta}$  de forma

$$\tilde{\Delta} = D + j E, \text{ unde } \Delta = \sqrt{\tilde{\Delta}^2} = \sqrt{D^2 + E^2},$$

în care s-au folosit notațiile:

$$D = m_1 m_2 \omega^4 - k m_2 \omega^2;$$

$$E = k b \omega - b \omega^3 (m_1 + m_2)$$

Amplitudinile, în complex,  $\tilde{A}_1$  și  $\tilde{A}_2$  au expresiile:

$$\tilde{A}_1 = \frac{\tilde{F}}{D^2 + E^2} [(GD + HE) + j(DH - GE)];$$

$$\tilde{A}_2 = -\frac{\tilde{F}}{D^2 + E^2} (E + jD)H$$

unde  $G = -m_2 \omega^2$  și  $H = b \omega$

de unde rezultă amplitudinile  $A_1$  și  $A_2$  ale mișcărilor maselor  $m_1$  și respectiv  $m_2$ :

$$\tilde{A}_1^2 = A_1^2 = \frac{\tilde{F}^2}{(D^2 + E^2)^2} \times [G^2 D^2 + H^2 E^2 + D^2 H^2 + G^2 E^2]$$

$$\text{sau } A_1^2 = \frac{F_0^2}{(D^2 + E^2)^2} [(G^2 + H^2)(D^2 + E^2)] = \frac{F_0^2 (G^2 + H^2)}{D^2 + E^2}$$

$$\text{de unde } A_1 = \frac{F_0 \sqrt{G^2 + H^2}}{\Delta};$$

$$\tilde{A}_2^2 = A_2^2 = \frac{F_0^2}{(D^2 + E^2)^2} (D^2 + E^2) H^2 = \frac{F_0^2 H^2}{D^2 + E^2}$$

$$\text{de unde } A_2 = \frac{F_0 H}{\Delta}.$$

Înlocuind expresiile  $D, E, G, H$  și  $F_0 = m_0 r \omega^2$ , rezultă  $\Delta$  și  $A_1, A_2$ :

$$\Delta = \omega \sqrt{m_1^2 m_2^2 \omega^6 + [b^2 (m_1 + m_2)^2 - 2m_1 m_2 k] \omega^4 + [k^2 m_2^2 - 2kb^2 (m_1 + m_2)] \omega^2 + k^2 b^2} = \omega R$$

$$A_1 = \frac{F_0}{\Delta} \sqrt{m_2^2 \omega^4 + b^2 \omega^2} \quad \text{sau}$$

$$A_1 = \frac{F_0}{R} \sqrt{m_2^2 \omega^2 + b^2}$$

$$A_2 = \frac{F_0 b \omega}{\Delta} \quad \text{sau} \quad A_2 = \frac{F_0 b}{R}$$

unde s-au utilizat notațiile

$$R = \sqrt{r_6 \omega^6 + r_4 \omega^4 + r_2 \omega^2 + r_0};$$

$$r_6 = m_1^2 m_2^2$$

$$r_4 = b^2 (m_1 + m_2)^2 - 2m_1 m_2 k$$

$$r_2 = k^2 m_2^2 - 2kb^2 (m_1 + m_2)$$

$$r_0 = k^2 b^2$$

În regim de funcționare în **postrezonanță** ( $\omega \gg p_{max}$ ), avem:

$$A_{1 \text{ stab}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A_1 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} m_0 r \sqrt{\frac{m_2^2 \omega^6 + b^2 \omega^4}{r_6 \omega^6 + r_4 \omega^4 + r_2 \omega^2 + r_0}}$$

$$\text{sau } A_{1 \text{ stab}} = m_0 r \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2 m_2^2}} = \frac{m_0}{m_1} r$$

$$A_{2 \text{ stab}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A_2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{m_0 r \omega^2 b}{\sqrt{r_6 \omega^6 + r_4 \omega^4 + r_2 \omega^2 + r_0}}$$

$$\text{sau } A_{2 \text{ stab}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A_2 = 0$$

b) Transmisibilitatea  $T$  se determină cu relația  $T = F_T^{max} / F_0$ , unde  $F_T^{max}$  este forța maximă transmisă la masa  $m_2$  de beton.

Considerăm că soluțiile reale ale sistemului de ecuații pot fi adoptate de forma

$$x_1 = A_1 \cos \omega t$$

$$x_2 = A_2 \cos (\omega t - \varphi),$$

unde  $\varphi$  este unghiul de defazaj dintre forța perturbatoare  $F_0 \cos \omega t$  și deplasarea instantanee  $x_2$ .

Astfel, avem:

$$F_T = b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = b [-\omega A_1 \sin \omega t + \omega A_2 \sin (\omega t - \varphi)]$$

$$= b \omega [(A_1 + A_2 \cos \varphi) \sin \omega t - A_2 \sin \varphi \cos \omega t]$$

Pe de altă parte  $F_T$  se mai poate scrie sub forma

$$F_T = F_T^{max} \sin (\omega t + \theta)$$

în care nu se cunosc  $F_T^{max}$  și  $\theta$ , urmând a fi determinate din identitatea

$$F_T = F_T^{max} \cos \theta \sin \omega t + F_T^{max} \sin \theta \cos \omega t$$

$$\equiv b \omega (A_1 + A_2 \cos \varphi) \sin \omega t - b \omega A_2 \sin \varphi \cos \omega t$$

Identificând coeficienții funcțiilor de același nume ( $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$ ) din ambii membri ai egalității obținem:

$$F_T^{max} \cos \theta = b \omega (A_1 + A_2 \cos \varphi)$$

$$F_T^{max} \sin \theta = -b \omega A_2 \sin \varphi,$$

de unde

$$F_T^{max} = b \omega \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi}$$

$$\text{și } \tan \theta = -\frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi}$$

în care

$$\sin \varphi = \frac{m_2 \omega}{\sqrt{b^2 + m_2^2 \omega^2}}; \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + m_2^2 \omega^2}}$$

Transmisibilitatea forței la masa de beton este

$$T = \frac{F_T^{max}}{F_o} \text{ sau}$$

$$T = \frac{b}{m_o r} \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi}{\omega^2}}$$

în care înlocuind  $A_1, A_2$  și  $\cos \varphi$  cu expresiile de mai sus obținem relația finală pentru  $T$

$$T = \frac{b}{m_o r \omega} \sqrt{\frac{F_o^2}{R^2} (m_2^2 \omega^2 + 4b^2)} \text{ sau}$$

$$T = b \sqrt{\frac{m_2^2 \omega^4 + 4b^2 \omega^2}{r_6 \omega^6 + r_4 \omega^4 + r_2 \omega^2 + r_0}}$$

## 2. PARAMETRII DINAMICI LA MAȘINILE VIBRATOARE PREVĂZUTE CU SISTEM DE IZOLARE DIN CAUCIUC ANTIVIBRATIL

Se consideră sistemul elastic format din două mase concentrate separate între ele printr-o legătură antivibratilă din cauciuc.

Nivelul vibrațiilor transmise de la organul activ de masă  $m_1$  la elementul de masă  $m_2$  ce trebuie protejat este apreciat cu ajutorul transmisibilității. În figura 2.1 se prezintă modelul sistemului, care conține o treaptă vâscoelastică din elemente de cauciuc antivibratil. Din categoria mașinilor cu acțiune vibrantă care pot fi studiate pe baza acestui model fac parte următoarele: vibroînfigătoare pentru piloți și palplanșe, rulouri compactoare (tractate) vibratoare, plăci vibratoare.

Se menționează că modelul de calcul poate fi aplicabil și unor subansamble care fac parte din structura unor mașini ce nu au acțiune vibrantă, dar care prin natura funcționării generează vibrații dăunătoare.

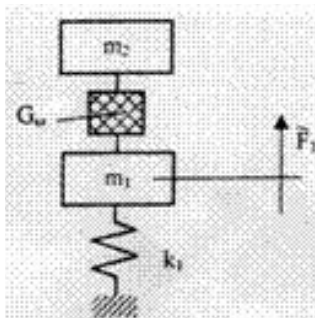


Figura 2.1

## 2.1. Determinarea coeficientului de transmisibilitate

Schema de calcul din figura 2.1 reprezintă modulul dinamic pentru unele categorii de mașini cu acțiune vibrantă, a căror schemă constructivă este dată în figura 2.2. Pentru fiecare utilaj, pe schița din figura 2.2, au fost marcate organul de lucru 1 cu acțiune vibrantă, sistemul antivibratil 2, compus din elemente de cauciuc și structura șasiului 3, cu subansamble care necesită izolarea antivibratila.

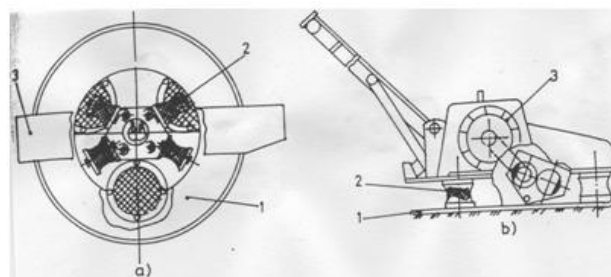


Figura 2.2

În vederea aprecierii efectului de izolare a vibrațiilor se va utiliza coeficientul de transmisibilitate, astfel încât acesta să poată exprima capacitatea de diminuare a mișcării vibratorii transmise de la organul de lucru (rulou, placă, element de prindere) la subansamblul care conține motorul de acționare și celelalte elemente mecanice auxiliare.

Elementele din cauciuc sunt caracterizate prin modulul longitudinal complex de elasticitate  $E^*$  care se exprimă astfel:

$$E^* = G^* (1 + \beta \Phi^2) \quad (2.1)$$

în care:  $G^*$  este modulul de elasticitate transversal complex;  $\beta$  - coeficientul de multiplicare ( $\beta = 5 \div 20$ );  $\Phi$  - coeficientul de formă al elementului din cauciuc.

Modulul transversal complex  $G^*$  se exprimă în funcție de componenta elastică și vâscoasă sub formă:

$$G^* = G (1 + j \delta) \quad (2.2)$$

unde:  $G$  este modulul de elasticitate transversal care depinde de pulsația  $\omega$  a mișcării (în cazul cauciucului utilizat influența pulsației asupra proprietăților vâscoelastice este nesemnificativă din care motiv se va utiliza numai notația  $G^*$ );  $\delta$  este unghiul de pierdere mecanică internă;  $j = \sqrt{-1}$  este unitatea imaginară.

În acest caz, coeficientul de rigiditate echivalent al sistemului compus din mai multe elemente antivibratile, identice geometric și pe baza aceleiași rețete de cauciuc, se exprimă astfel:

$$k^* = \frac{S}{h} E^* \text{ sau, ținând seama de relațiile (2.1) și}$$

$$(2.2) \text{ se obține } k^* = \frac{S}{h} (1 + \beta \phi^2) G^* \quad (2.3)$$

unde:  $S$  este aria transversală totală a elementelor din cauciuc, corespunzătoare treptei antivibratile;  $h$  - înălțimea activă a unui element din cauciuc.

Se notează cu  $\lambda = (1 + \beta \phi^2) \frac{S}{h}$  factorul de multiplicare geometric și se obține:

$$k^* = \lambda G^* \quad (2.4)$$

Ecuatiile diferențiale de mișcare pentru modelul de calcul din figura 2.1, scrise în complex, au următoarea formă:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\tilde{x}}_1 + \lambda G^* (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + k_1 \tilde{x}_1 = \tilde{F}_1 \\ m_2 \ddot{\tilde{x}}_2 + \lambda G^* (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Forța  $\tilde{F}_2$  transmisă masei superioare prin intermediul treptei elastice antivibratile caracterizată de  $G^*$  este dată de relația

$$\tilde{F}_2 = \lambda G^* \tilde{x}_2. \quad (2.6)$$

Din prima relație a sistemului (2.5) rezultă

$$\tilde{F}_1 = (-m_1 \omega^2 + \lambda G^* + k_1) \tilde{x}_1 - \lambda G^* \tilde{x}_2 \quad (2.7)$$

sau ținând seama de (6) se obține

$$\tilde{F}_1 = (-m_1 \omega^2 + \lambda G^* + k_1) \tilde{x}_1 - \tilde{F}_2 \quad (2.8)$$

Din relația a doua a sistemului (2.5) avem:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{F}_2 \frac{\lambda G^* - m_2 \omega^2}{(\lambda G^*)^2} \quad (2.9)$$

care introdusă în relația (2.8) conduce la formula:

$$\tilde{F}_1 = \frac{\tilde{F}_2}{(\lambda G^*)^2} [(\lambda G^* - m_2 \omega^2) -$$

$$-(\lambda G^*)^2] (-m_1 \omega^2 + \lambda G^* + k_1) \quad (2.10)$$

Coefficientul de transmisibilitate  $T^*$ , în complex, se definește pe baza relației (2.10) astfel:

$$T^* = \frac{\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1} = (\lambda G^*)^2 [m_1 m_2 \omega^4 - m_2 k_1 \omega^2 + (k_1 \lambda - m_2 \omega^2 \lambda - m_1 \omega^2 \lambda) G^*]^{-1} \quad (2.11)$$

Prin exprimarea modulului de elasticitate  $G^*$  sub forma  $G^* = G(1 + j\delta)$ , în cazul cauciucului românesc utilizat, relația (11) apare sub forma

$$T^* = \frac{A + jB}{C + jD} \text{ sau} \quad (2.12)$$

$$T^* = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$$

unde:

$$A = (1 - \delta^2) \lambda^2 G^2;$$

$$B = 2 \lambda^2 G^2 \delta;$$

$$C = m_1 m_2 \omega^4 - (k_1 m_2 + \lambda G m_2 + m_1 \lambda G) \omega^2 + \lambda G k_1$$

$$D = \lambda G \delta (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2).$$

Mărimea coeficientului de transmisibilitate

$T = |T^*|$  se obține din (2.12) sub forma:

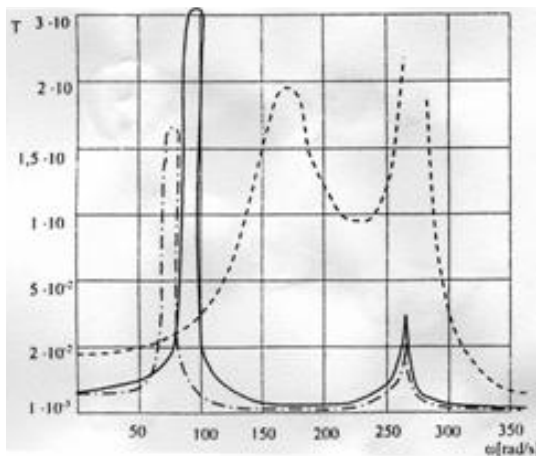
$$T = |T^*| = [(A^2 + B^2) / (C^2 + D^2)]^{1/2} \quad (2.13)$$

cu unghiul de defazare dat de relația

$$\Phi = \arctan \frac{BC - AD}{AC + BD} \quad (2.14)$$

**Tabelul 1**

|   |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Duritatea cauciucului în ShA                                      | 30   | 40   | 45   | 50   | 60   | 65   | 70   | 75   |
| Unghiul mecanic de pierdere $\delta$                              | 0.04 | 0.05 | 0.08 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 |
| Modulul de elasticitate transversală $G$ , în daN/cm <sup>2</sup> | 3.20 | 4.60 | 5.40 | 6.50 | 9.40 | 11.6 | 16.0 | 21.0 |



**Figura 3**

Pentru cauciucul antivibratilor utilizat în mod curent la fabricarea elementelor amortizoare, în funcție de duritate, se prezintă în tabelul 1 perechea de valori  $\delta, G$ , astfel încât relațiile (13) și (14) devin parametrizate. În acest sens, pot fi trasate curbele de variație a transmisibilității în funcție de variabila curentă și de perechea de parametri  $\delta, G$ , (fig. 3)

pentru un utilaj cu următoarele date:  $m_1 = 1700$  kg,  $m_2 = 270$  kg,  $k_1 = 120 \cdot 10^6$  N/m. Pentru un element din cauciuc, tip S 1201 caracteristicile geometrice sunt:  $\phi = 0,5$ ;  $\beta = 10$ ;  $\lambda = 70$ , iar  $G$  și  $\delta$  se aleg din tabelul 1. Se menționează că sistemul antivibratilor al utilajului este compus din opt elemente din cauciuc legate în paralel (fig 2.1).

Pe baza modelului de calcul adoptat, care conține o treaptă de izolare antivibratilă din cauciuc modelat ca un mediu vâscoelastic definit prin modulul complex de elasticitate, a fost determinat coeficientul de transmisibilitate, în funcție de variabila curentă  $\omega$  (pulsăția forței perturbatoare) și parametrul fizico-mecanic al cauciucului definit prin perechea de valori  $(\delta, G)$ .

Pentru cauciucul antivibratil cu duritatea discret variabilă de la 30° ShA până la 75° ShA, caracterizat prin valorile parametrilor  $(\delta, G)$  definiți în tabelul 1, au fost trasate familiile de curbe  $T = f(\omega, \delta, G)$ , de unde rezultă următoarele:

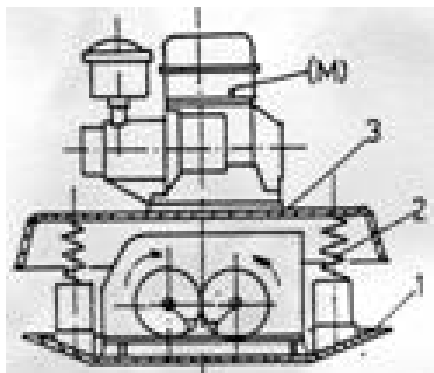
a) modificarea parametrilor cauciucului antivibratil ai treptei a doua, prin perechea de valori ale parametrilor  $(\delta, G)$ , duce la deplasarea primei zone de rezonanță, în timp ce a doua zonă se menține neschimbată.

b) maximile primei zone de rezonanță, parametrizate prin perechea  $(\delta, G)$  se caracterizează printr-un punct cu valoarea cea mai redusă din întreg spectrul de curbe corespunzătoare;

c) regimul de lucru al mașinii poate fi ales între cele două zone de rezonanță, sau în cel mai favorabil caz după cea de-a doua zonă de rezonanță, unde coeficientul de transmisibilitate este mult diminuat, sub valorile recomandate de 0,05 ... 0,10.

### 3. PARAMETRII DINAMICI AI PLĂCILOR VIBRATOARE PENTRU COMPACTAREA PĂMÂNTURILOR ȘI ÎMBRĂCĂMINȚILOR ASFALTICE

În figura 3.1 se prezintă schema constructivă a unei plăci compactoare cu vibrator unidirecțional pe verticală. Aceasta se compune din trei părți structurale și anume: talpa plăcii compactoare (organul de lucru) 1, care se află în contact nemijlocit cu mediul de compactat (pământ, mixtură asfaltică, beton proaspăt), elementele elastice de legătură 2 (arcuri metalice) și structura superioară 3 care constituie suportul motorului de acționare M. Se cere ca studiul vibrațiilor să se efectueze cu ajutorul matricei dinamice.

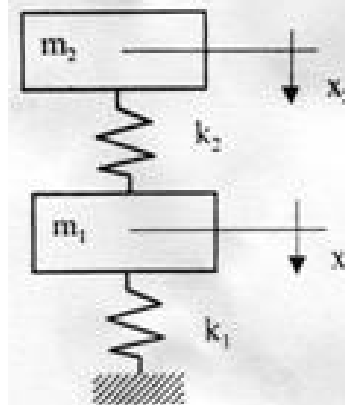


**Figura 3.1**

**Modelul dinamic.** Pentru calculul parametrilor funcționali de lucru ai plăcilor compactoare vibratoare se adoptă modelul elastic cu două grade de libertate reprezentat în figura 3.2. Acest model de calcul are la bază următoarele ipoteze simplificatoare:

a) legătura dintre ansamblul talpă-vibrator și placă suport a motorului de acționare este considerată elastică; acesta poate fi realizată, din arcuri metalice, sau din elemente antivibratile din cauciuc; soluția constructivă a legăturii elastice pe bază de arcuri metalice sau elemente de cauciuc se adoptă funcție de nivelul de performanță impus;

b) mediul compactat este modelat ca element elastic, ipoteză admisă pentru soluția când mașina funcționează în regim de postrezonanță;



**Figura 3.2**

c) talpa plăcii vibratoare, în timpul lucrului, pastrează contactul permanent cu terenul.

În figura 3.2 s-au folosit următoarele notații:  $m_1$  - masa ansamblului talpă-vibrator;  $m_2$  - masa ansamblului suport-motor de acționare;  $k_1$  - coeficientul de rigiditate al mediului compactat;  $k_2$  - coeficientul de rigiditate al legăturii elastice dintre vibratorul plăcii și motorul de acționare;  $F = P \sin \omega t$  - forța perturbatoare generată de vibrator, exprimată în funcție de timp. Coordonatele generalizate ale sistemului au fost notate cu  $x_1$  și  $x_2$  reprezentând, respectiv, deplasările absolute ale maselor  $m_1$  și  $m_2$ .

**Studiul vibrațiilor libere.** Energia cinetică a sistemului mecanic din figura 3.2 este

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (3.1)$$

iar energia potențială de deformare a sistemului elastic, considerând originea deplasărilor  $x_1$  și  $x_2$  în poziția de echilibru static stabilă a sistemului va fi

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \text{ sau}$$

$$V = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2) x_1^2 - 2 k_2 x_1 x_2 + k_2 x_2^2] \quad (3.2)$$

Pe baza relației (1), se poate scrie matricea de inerție

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

iar din relația (3.2), rezultă matricea de rigiditate, astfel:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Ecuția diferențială de mișcare, în formulare matriceală este

$$M \{\ddot{x}\} + K \{x\} = 0 \quad (3.3)$$

și  $M^{-1} M \{\ddot{x}\} + M^{-1} K \{x\} = 0 \quad (3.4)$

sau  $I \{\ddot{x}\} + D \{x\} = 0, \quad (3.5)$

unde  $D = M^{-1} K$  este matricea dinamică. Matricea inversă este dată de relația

$$M^{-1} = \frac{I}{\det M} M_{adj},$$

unde  $M_{adj} = [COF M]^T = \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}$

iar forma finală va fi

$$M^{-1} = \frac{I}{m_1 m_2} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Matricea dinamică  $D$  se determină pe baza expresiilor matricelor  $M$  și  $K$ , astfel:

$$D = \frac{I}{m_1 m_2} \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \quad (3.7)$$

$$= \frac{I}{m_1 m_2} \begin{bmatrix} m_2(k_1 + k_2) & -m_2 k_2 \\ -m_1 k_2 & m_1 k_2 \end{bmatrix}$$

Din relația (3.7), rezultă elementele  $d_{ij}$  ale matricei dinamice, astfel:

$$d_{11} = m_2(k_1 + k_2);$$

$$d_{12} = -m_2 k_2;$$

$$d_{21} = -m_1 k_2;$$

$$d_{22} = m_1 k_2.$$

Ecuția pulsațiilor proprii este

$$p^4 - (d_{11} + d_{22}) p^2 + d_{11} \cdot d_{22} - d_{12} d_{21} = 0$$

sau, înlocuind coeficienții  $d_{ij}$  cu valorile lor, avem:

$$m_1 m_2 p^4 - [m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2] p^2 + \quad (3.8)$$

$$+ m_1 m_2 k_1 k_2 = 0,$$

cu soluțiile:

$$p_{1,2}^2 = \frac{I}{2 m_1 m_2} [m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2] \pm \quad (3.9)$$

$$\pm \sqrt{[m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2]^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}$$

Notăm  $\lambda_m = m_2/m_1$  și  $\lambda_k = k_2/k_1$ , și avem:

$$p_{1,2}^2 = \frac{k_1}{m_1} \frac{I}{2 \lambda_m} [(1 + \lambda_k) \lambda_m + \lambda_k \pm \quad (3.10)$$

$$\pm \sqrt{[(1 + \lambda_k) \lambda_m + \lambda_k]^2 - 4 \lambda_k \lambda_m}]$$

**Studiul vibrațiilor forțate.** Pentru studiul vibrațiilor forțate, la ecuația (3.5) se atașează vectorul forțelor perturbatoare  $\{f\}$ , astfel:

$$I \{\ddot{x}\} + D \{x\} = \{f\}, \quad (3.11)$$

în care vectorul  $\{f\}$  are două componente, așa încât poate fi scris sub forma

$$\{f\} = \begin{bmatrix} m_0 r \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sin \omega t \quad (3.12)$$

Pentru ecuația diferențială (3.11), se alege soluția de forma

$$\{x\} = \{a\} \sin \omega t, \quad (3.13)$$

cu derivata sa de ordinul doi

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{a\} \sin \omega t, \quad (3.14)$$

$\{x\}$  reprezentând vectorul deplasărilor, iar  $\{a\}$  - vectorul amplitudinilor.

Înlocuind soluția (3.13) în ecuația diferențială (11), avem:

$$-\omega^2 I \{a\} + D \{a\} = M^{-1} \{f_0\}^T$$

$$\text{sau } [-\omega^2 I + D] \{a\} = M^{-1} \{f_0\}^T \quad (3.15)$$

unde  $\{f_0\}^T = [m_0 r \omega^2 \ 0]$ .

Se notează  $G = -\omega^2 I + D$ ,

$$\text{sau } G = -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ m_1 & m_1 \\ -k_2 & k_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

care sub forma desfășurată se scrie

$$G = \begin{bmatrix} -\omega^2 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\omega^2 + \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

Matricea formată din cofactorii lui  $G$ , notată cu  $COF G$  este

$$COF G = \begin{bmatrix} -\omega^2 + \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\omega^2 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \end{bmatrix}$$

Matricea adjunctă a lui  $G$  este

$$G_{adj} = COF G^T = \begin{bmatrix} -\omega^2 + \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\omega^2 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

iar determinantul matricei  $G$  este

$$\det G = \frac{I}{m_1 m_2} [(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) \times \quad (3.17)$$

$$\times (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2].$$

Pe baza relațiilor (3.16) și (3.17), se poate determina matricea inversă  $G^{-1}$ , astfel:

$$G^{-1} = \frac{1}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \begin{bmatrix} m_1(k_2 - m_2 \omega^2) & m_2 k_2 \\ m_1 k_2 & m_2(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) \end{bmatrix}$$

Ecuția vibrațiilor forțate (3.15) mai poate fi scrisă și sub forma

$$G \{a\} = M^{-1} \{f_0\}, \quad (3.18)$$

pe care, înmulțind-o în ambii membrii cu  $G^{-1}$ , conduce la  $G^{-1} G \{ a \} = G^{-1} M^{-1} \{ f_o \}$  sau

$$I \{ a \} = \frac{\begin{bmatrix} m_1 (k_2 - m_2 \omega^2) & m_2 k_2 \\ m_1 k_2 & m_2 (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 r \omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

Efectuând toate produsele din expresia de mai sus, obținem:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \begin{Bmatrix} (k_2 - m_2 \omega^2) m_0 r \omega^2 \\ k_2 m_0 r \omega^2 \end{Bmatrix}$$

de unde rezultă amplitudinile vibrațiilor forțate ale celor două mase

$$a_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) m_0 r \omega^2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_1 - m_2 \omega^2) - k_2^2}; \quad (3.19)$$

$$a_2 = \frac{k_2 m_0 r \omega^2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}. \quad (3.20)$$

La proiectarea plăcilor compactoare vibratoare se ține seama ca amplitudinea  $a_2$  să fie neglijabilă, comparativ cu amplitudinea  $a_1$ . Pentru aceasta se caută ca elementele elastice de legătură între cele două mase să fie atât de elastice încât să realizeze un grad de izolare  $I \geq 90\%$  (*Mașini de construcții*, vol. II. Ed. Tehnică, 1985, pag. 389).

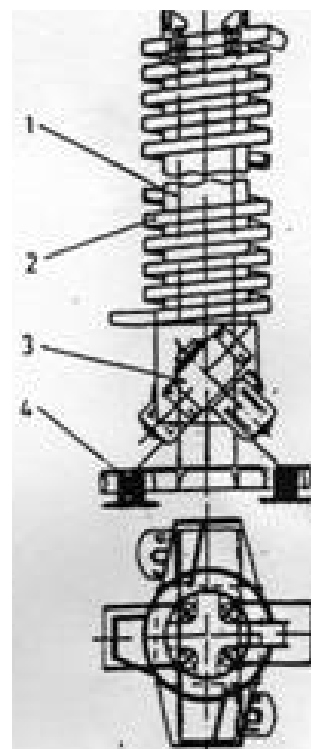
#### 4. PARAMETRII DINAMICI AI VIBRAȚIILOR TRANSPORTOARELOR VIBRATOARE ELICOIDALE

Transportoarele vibratoare elicoidale sunt destinate pentru realizarea procesului tehnologic de ridicare pe verticală a sarcinilor individuale sau a materialelor vărsate.

**Soluția constructivă.** Utilajul se compune (fig. 4.1) dintr-un tub central portant vertical 1, pe exteriorul căruia se află fixat un jgheab elicoidal de transport 2. Unghiul de înclinare a spirei jgheabului este cuprins între  $2^\circ$  și  $10^\circ$ . Mișcarea vibratorie a utilajului este realizată cu ajutorul a doua vibroexcitatoare inerțiale 3, plasate, de regulă, la partea inferioară a transportorului. Rezemarea transportorului la partea inferioară, se face printr-un set de elemente elastice 4 (din metal sau cauciuc).

**Parametrii dinamici funcționali.** Pentru a realiza corelarea parametrilor dinamici funcționali cu cei constructivi și tehnologici, este necesară adaptarea unui model capabil să reflecte cât mai fidel rezultatele teoretice cu cele experimentale. Astfel, la transportoarele vibratoare elicoidale, efectul de avans al materialului pe jgheab are loc ca urmare a generării a doua mișcări simultane și anume: una pe verticală și cealaltă în plan orizontal.

Cele două mișcări sunt întreținute datorită existenței unei forțe perturbatoare armonice verticale și a unui cuplu de moment armonic, ambele fiind defazate în cvadratura. Modelul dinamic poate fi schematizat ca un sistem cu două grade de libertate  $z$  și  $\varphi$ , mișcările de vibrare fiind cuplate. Pentru anumite condiții constructive impuse în alcătuirea utilajului, se poate realiza decuplarea modurilor de vibrare după coordonatele  $z$  și  $\varphi$ , tratându-se separat fiecare mișcare în parte.



**Figura 4.1**

Pentru mișcarea pe verticală, avem ecuația diferențială sub forma:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + p^2 z = \frac{F_o}{m} \sin \omega t, \quad (4.1)$$

cu soluția:

$$z = \left( \frac{F_o}{mp^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \theta), \quad (4.2)$$

amplitudinea mișcării pe verticală fiind

$$A_z = \frac{F_0}{mp^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}} \quad (4.3)$$

Pentru mișcarea vibratorie, în plan orizontal, se determină torsorul perturbator, (fig. 4.2). Astfel, vom avea:

$$F_z = 2 m_o r \omega^2 \cos \gamma \sin \omega t \quad (4.4)$$

$$M_{oz} = 2 m_o r \omega^2 a \sin \gamma \sin \omega t \quad (4.5)$$

Ecuția diferențială a mișcării vibratorii în plan orizontal, neglijând amortizarea, este

$$J \ddot{\varphi} = M_{oy} \quad (4.6)$$

cu soluția 
$$\varphi = \frac{2 m_o r a}{J} \sin \gamma \sin \omega t \quad (4.7)$$

în care:  $J$  este momentul de inerție al mașinii față de axa verticală de simetrie;  $\varphi$  - deplasarea

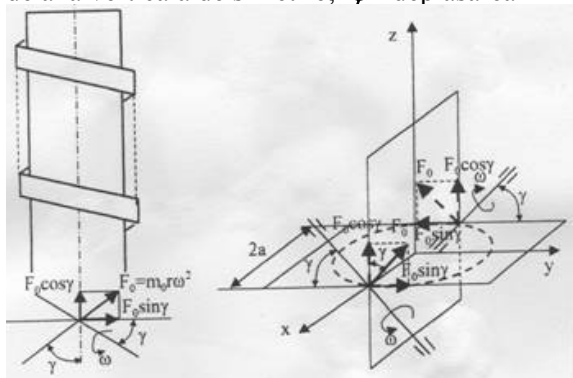


Figura 4.2

unghiulară în plan orizontal;  $m_o r$  - momentul static total al maselor excentrice de dezechilibrare ale vibratoarelor;  $\gamma$  - unghiul format de axa vibratoarelor cu planul orizontal (fig.4.3);  $2a$  - distanța dintre axele vibratoarelor (fig. 4.3)

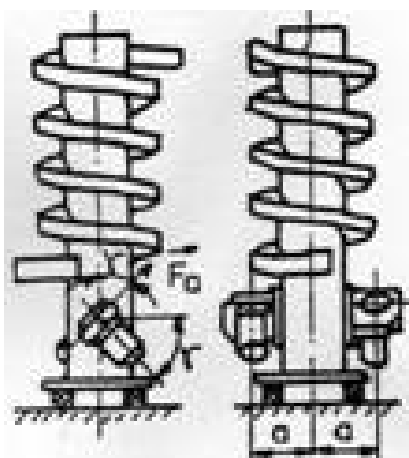


Figura 4.3

Deplasarea  $x$  în plan orizontal a unui punct situat pe un cerc de raza  $R$  a jgheabului elicoidal este:

$$x = R \varphi = \frac{2 m_o r a R}{J} \sin \gamma \sin \omega t \quad (4.8)$$

Unghiul de aruncare  $\beta$  corespunzător razei  $R$  a jgheabului este dat de relația

$$\tan \beta = z / x, \quad (4.9)$$

unde  $z = (2m_o r / m) \cos \gamma \sin \omega t$  pentru situația generală a funcționării mașinii în postrezonanță ( $\omega > p$ ). Se menționează că deoarece regimul de funcționare se află în postrezonanță (fig. 4.4), amplitudinile corespunzătoare celor două mișcări

$$A_z = \frac{2 m_o r}{m} \cos \gamma \quad (4.10)$$

sunt:

$$A_\varphi = \frac{2 m_o r a}{J} \sin \gamma$$

Relațiile sunt valabile numai pentru condiția  $\omega = (2 \div 3) p_z$ ;  $\omega = (2 \div 9) p_\varphi$  (4.11)

Curbele de variație a amplitudinii vibrațiilor decuplante funcție de pulsația excitație  $\omega$  sunt prezentate în fig. 4.4.

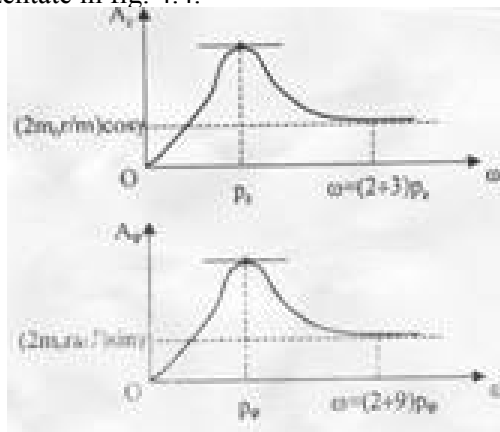


Figura 4.4.

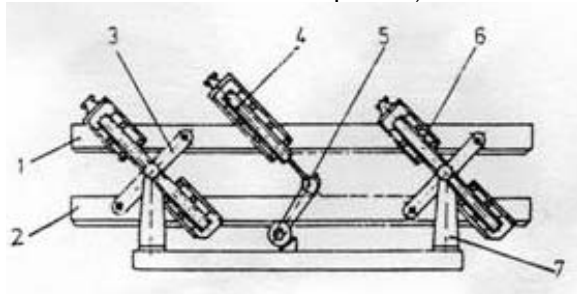
## 5. STUDIUL PARAMETRIILOR DINAMICI LA CIURUL VIBRATOR BIMASIC CU FUNCȚIONARE ÎN REZONANȚĂ

Soluția tehnică adoptată pentru ciurul vibrator cu funcționare în rezonanță este prezentată în figura 5.1. În principal, acest utilaj se compune din următoarele părți: cadrul superior 1, cadrul inferior 2, balansierul 3, grupul elastic al bielei de acționare 4, arborele de antrenare 5, grupul elastic de legătură 6, suportul 7.

Funcționarea utilajului se caracterizează prin deplasarea unidirecțională în regim de vibrație a cadrului superior 1 și cadrului inferior 2, ambele fiind perturbate de sistemul arbore de antrenare 5 și grupul elastic al bielei 4. Perturbarea se obține cu ajutorul unei bușe excentrice, montată în capul bielei elastice. Balansierele 3 sunt montate articulat prin intermediul unor silentblocuri pe suporturile 7.

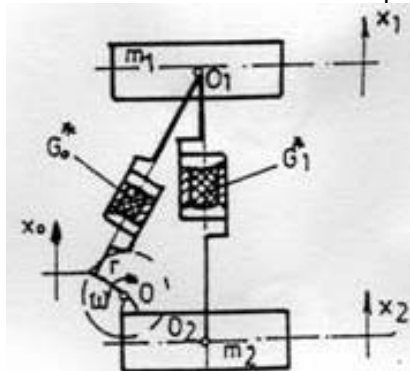


Întreaga greutate, proprie și a materialului, este preluată de sistemul balansier-suporturi. Se menționează că, atât pe cadrul superior, cât și pe cadrul inferior se află montate organele de clasare (sitele cu ochiuri rotunde sau pătrate).



**Figura 5.1.**

**Modelul dinamic.** Pentru soluția tehnică din figura 5.1s-a adoptat modelul schematizat în fig. 5.2. Se precizează că organele de clasare au fost modelate prin masele  $m_1$  și  $m_2$ , mediul vâscoelastic de legătură dintre cele doua elemente este caracterizat prin coeficientul de rigiditate complex  $k_1^*$ , iar mediul vâscoelastic al bielei caracterizat prin



**Figura 5.2**

coeficientul de rigiditate complex  $k_0^*$ .

Deoarece raportul dintre amplitudinea vibrațiilor și lungimea balansierelor este neglijabil, se poate adopta ipoteza că organele de sortare au numai mișcare de translație după direcția unghiului de atac, mișcarea fiind caracterizată prin vibrații unidirecționale.

Datorită faptului că mecanismul cu excentric al bielei este fixat pe unul din organele de sortare, iar extremitatea bielei este prinsă de celălalt organ de sortare, rezultă că sistemul este perturbat interior. În acest caz, sistemul mecanic are proprietatea că centrul maselor rămâne fix dacă organele de clasare și cadrul de prindere al acestora sunt identice geometric și masic, iar materialul granular este uniform distribuit pe suprafața de clasare. În caz contrar, fie datorită aglomerării locale de material,

fie disproporțiilor dintre organele de clasare, centrul de masă al sistemului își schimbă poziția, fapt ce duce la apariția forțelor dinamice de legătură în articulațiile balansierelor.

În fig. 5.2 s-au utilizat notațiile specifice cu următoarea semnificație:  $x_1$  - este deplasarea unidirecțională a organului de clasare superior;  $x_2$  - deplasarea unidirecțională a organului de clasare inferior;  $x_0$  - deplasarea unidirecțională a capătului bielei ce conține bucsa excentrică;  $r$  - excentricitatea bucsii;  $G_1^*$  - modulul de elasticitate transversal complex al legăturii vâscoelastice dintre cele două organe de clasare;  $G_0^*$  - modulul de elasticitate transversal complex al grupului vâscoelastic al bielei de acționare;  $\omega$  - pulsația excitatoare, aceeași cu viteza unghiulară a arborelui de antrenare.

#### **Determinarea parametrilor dinamici.**

Funcție de natura materialului de clasare și de producția orară necesară, se stabilește nivelul de performanță al utilajului, determinat de următorii parametri: amplitudinea organelor de clasare, pulsația vibrațiilor forțate, forța din biela elastică, puterea de acționare și momentul de pornire a utilajului.

#### **Ecuatiile diferențiale de mișcare.**

Schematizarea modelului de calcul din figura 5.2 permite scrierea sistemului ecuațiilor diferențiale de mișcare

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_0 + k_1)(x_1 - x_2) &= k_0 x_0; \\ m_2 \ddot{x}_2 - (k_0 + k_1)(x_1 - x_2) &= -k_0 x_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

în care  $k_0$  și  $k_1$  sunt coeficienții de rigiditate echivalenți ai legăturilor elastice din structura bielei și respectiv, dintre organele de clasare.

Adunând membru cu membru cele două ecuații, se obține

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0, \text{ de unde} \quad (5.2)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = - \frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \mu \quad (5.3)$$

Semnul minus semnifică faptul că cele două organe de clasare se mișcă defazat

- dacă sistemul legăturilor din structura bielei și, respectiv, dintre organele de clasare se

caracterizează numai prin proprietatea de **elasticitate**, atunci defazajul  $\varphi$  dintre mișcarea organelor de clasare este  $\varphi = \pi$

- dacă sistemul legăturilor din structura bielei și respectiv, al organelor de clasare se caracterizează prin proprietatea de **vâscoelasticitate**, atunci defazajul  $\varphi$  dintre mișcarea organelor de clasare va fi cuprins în intervalul  $(0, \pi)$ .

Raportul  $\mu = m_1 / m_2$  duce la următoarele cazuri:

- dacă  $\mu = 1$ , adică  $m_1 = m_2$ , atunci sistemul este echilibrat, caz în care nu transmite forțe dinamice în exterior;

- dacă  $\mu \neq 1$ , adică  $m_1 \neq m_2$ , atunci sistemul este neechilibrat, caz în care transmite forțe dinamice în exterior;

Relațiile (1) mai pot fi scrise și sub forma

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_o + k_1}{m_1} (x_1 - x_2) = \frac{k_o}{m_1} x_o$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_o + k_1}{m_2} (x_1 - x_2) = -\frac{k_o}{m_2} x_o$$

iar prin scăderea ecuației a doua din prima avem:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + (k_o + k_1) \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (x_1 - x_2) =$$

$$= k_o x_o \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (5.4)$$

$$\text{sau } \ddot{x} + (k_o + k_1) \frac{1}{m} x = k_o x_o \frac{1}{m}, \quad (5.5)$$

în care  $\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$  este accelerația instantanee a mișcării relative;  $x = x_1 - x_2$  - deplasarea relativă, pe direcția vibrațiilor de lucru, dintre cele două mase;  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  - masa redusă a sistemului.

Deoarece în construcția unor astfel de utilaje sunt utilizate numai elemente din cauciuc, vom exprima coeficientul de rigiditate echivalent unui grup elastic prin relația

$$k = \lambda G^*, \quad (5.6)$$

unde  $G^* = G(I + j\delta)$  este modulul complex de elasticitate transversală, iar  $\lambda$  - coeficientul geometric de multiplicare.

Modulul complex de elasticitate transversală exprimă comportarea elastică a cauciucului prin Re

$G^* = G$  și comportarea vâscoasă de disipare a energiei interne prin  $\text{Im } G^* = G \delta$ , în care  $G$  este modulul transversal, iar  $\delta$  este unghiul de pierdere mecanică internă a energiei.

Pentru elementele de forma paralelipedica din cauciuc solicitate fie la compresiune, fie la lunecare transversală, coeficientul geometric de multiplicare are expresiile:

$$\lambda = (1 + \beta \Phi^2) S / h - \quad (5.7)$$

pentru solicitarea de compresiune,

$$\lambda = S / h - \quad (5.8)$$

pentru solicitarea de lunecare (forfecare), în care:  $S$  este aria totală echivalentă de lucru a grupului de elemente antivibratile din cauciuc;  $h$  - înălțimea (grosimea) unui element antivibratil din cauciuc (în construcție **monostrat**);  $\Phi$  - unghiul de formă al elementului din cauciuc, care este raportul dintre aria încărcată la compresiune și aria liberă;  $\lambda$  - factorul de multiplicare ce ține seama de natura amestecului de cauciuc.

Introducând relația (5.6) în (5.5), obținem ecuația diferențială în complex

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{\lambda_o G_o^* + \lambda_1 G_1^*}{m} \tilde{x} = \frac{1}{m} \lambda_o G_o^* \tilde{x}_o, \quad (5.9)$$

$$\text{în care: } \tilde{x}_o = r e^{j\omega t}, \quad (5.10)$$

$$\tilde{x} = A^* e^{j\omega t}, \quad (5.11)$$

$r$  este excentricitatea capătului bielei;  $A^*$  - amplitudinea exprimată sub forma complexă.

Din rezolvarea ecuației diferențiale (5.9), rezultă

$$A^* = \frac{C [ (P + Q \delta_o) + j (P \delta_o - Q) ] I}{P^2 + Q^2} \quad (5.12)$$

în care au fost utilizate notațiile:

$$P = -m \omega^2 + \lambda_o G_o + \delta_1 G_1;$$

$$Q = \lambda_o G_o \delta_o + \lambda_o G_1 \lambda_1;$$

$$C = r \lambda_o G_o.$$

Mărimea complexă  $A^*$  poate fi exprimată și astfel:

$$A^* = A (\cos \Phi + j \sin \Phi) = A e^{j\Phi}, \quad (5.13)$$

unde  $A$  este amplitudinea deplasării relative a mișcării pe direcția vibrațiilor de lucru;  $\Phi$  - defazajul maselor în mișcare.

Din relațiile (5.12) și (5.13), se obțin expresiile pentru  $A$  și  $\Phi$ .

$$A = r \lambda_o G \sqrt{\frac{1 + \delta_o}{(-m \omega^2 + \lambda_o G_o + \lambda_1 G_1)^2 + (\lambda_o G_o \delta_o + \lambda_1 G_1 \delta_1)^2}} \quad (5.14)$$

$$\tan \varphi = \frac{(-m \omega^2 + \lambda_o G_o + \lambda_1 G_1) \delta_o - (\lambda_o G_o \delta_o + \lambda_1 G_1 \delta_1)}{(-m \omega^2 + \lambda_o G_o + \lambda_1 G_1) + (\lambda_o G_o \delta_o + \lambda_1 G_1 \delta_1) \delta_o} \quad (5.15)$$

Deplasarea relativă

$$\mathbf{x} = \mathbf{I} \mathbf{m} \mathbf{x} = A \sin(\omega t + \Phi), \quad (5.16)$$

iar pentru fiecare organ de clasare, deplasarea și respectiv, amplitudinea sunt date de relațiile:

$$x_1 = \frac{x}{1 + \mu}; \quad x_2 = \frac{x \mu}{1 + \mu}; \quad (5.17)$$

$$A_1 = \frac{A}{1 + \mu}; \quad A_2 = \frac{A \mu}{1 + \mu}. \quad (5.18)$$

**Forța din biela elastică de acționare.** Forța de acționare este echivalentă cu forța necesară pentru deformarea grupului elastic al bielei, luată cu semn schimbat

$$\mathbf{F} = -\partial \Pi_o / \partial \mathbf{x}_o, \quad (5.19)$$

în care  $\Pi_o = (1/2) \lambda_o G_o^* (x_1 - x_2 - x_o)^2$  este energia potențială de deformare a grupului elastic.

Expresia forței în scrierea sub forma complexă, pe baza relației (19) este dată de relația:

$$\tilde{\mathbf{F}} = k_o \tilde{\mathbf{x}} - k_o \tilde{\mathbf{x}}_o \text{ sau } \tilde{\mathbf{F}} = \lambda_o G_o^* (\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_o) \quad (5.20)$$

în care  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^* e^{j\theta}$ , unde  $\theta$  este defazajul dintre forța din bielă și deplasarea relativă;

$\tilde{\mathbf{x}}_o = r e^{j\omega t}$ , unde  $r$  este excentricitatea capătului bielei.

Pe baza formulării în complex, din relația (20), se obține

$$\mathbf{F}^* = \lambda_o G_o^* (A^* - r) \quad (5.21)$$

Dacă în relația (21) se înlocuiesc expresiile complexe  $\mathbf{G}^*$  și  $A^*$ , atunci se obține:

$$\mathbf{F}^* = \lambda_o G_o^* [(A \cos \varphi A \delta_o \sin \varphi - r) + j(A \sin \varphi + \delta_o A \cos \varphi - r \delta_o)], \quad (5.22)$$

de unde rezultă expresia forței din bielă, astfel:

$$\mathbf{F} = \text{Im } \mathbf{F} = F_o \sin(\omega t + \theta), \quad (5.23)$$

cu mărimile  $F_o$  și  $\theta$  date de relațiile:

$$F_o = \lambda_o G_o \sqrt{(1 + \delta_o^2)(A^2 + r^2 + 2A r \cos \varphi)}; \quad (5.24)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{A \sin \varphi + \delta_o A \cos \varphi - \delta_o r}{A \cos \varphi - \delta_o A \sin \varphi - r}. \quad (5.25)$$

Dacă  $\delta_o = \delta_1 = 0$ , se obține

$$F_o = \lambda_o G_o R, \quad (5.26)$$

în care:

$$R = \sqrt{(A^2 + r^2 - 2rA)} = |r - A| \quad (5.27)$$

$$A = r \lambda_o G_o \left| \frac{1}{-m \omega^2 + \lambda_o G_o + \lambda_1 G_1} \right| \quad (5.28)$$

{n acest caz, din relațiile (5.27) și (5.28) rezultă expresia funcției  $R = R(\omega)$ :

$$R(\omega) = r \left( 1 - \left| \frac{\lambda_o G_o}{-m \omega^2 + \lambda_o G_o + \lambda_1 G_1} \right| \right) \quad (5.29)$$

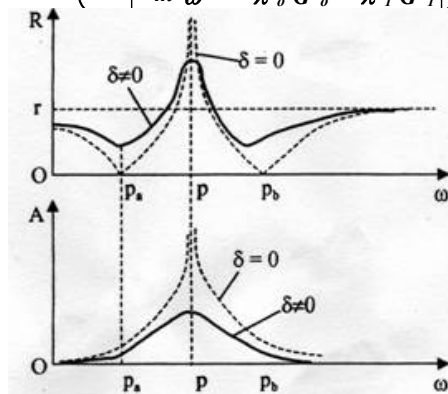


Figura 5.3

Reprezentarea grafică a funcției  $R(\omega)$  este prezentată în fig. 5.3. Se remarcă faptul că funcția  $R(\omega)$  și, implicit, forța din bielă,  $F_o$  se anulează pentru două valori distincte ale pulsației, și anume:

$$\omega = p_a = \sqrt{\frac{\lambda_1 G_1}{m}} \quad (5.30)$$

$$\omega = p_b = \sqrt{\frac{2 \lambda_o G_o + \lambda_1 G_1}{m}} \quad (5.31)$$

unde  $p_a$  este pulsația sistemului în regim de anterezonanță,  $p_b$  – pulsația sistemului în regim de postrezonanță.

Funcția  $R(\omega)$ , deci și forța  $F_o$ , atinge valoarea maximă la pulsația:

$$\omega = p = \sqrt{\frac{\lambda_o G_o + \lambda_1 G_1}{m}} \quad (5.32)$$

unde:  $p$  este pulsația proprie pentru regimul de rezonanță.

### Bibliografie

1. **Bratu, P.** Vibrațiile sistemelor elastice, Ed. Tehnică, București, 2000
  2. **Bratu, P.** Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje, Ed. Tehnică, București, 1990
  3. **Mihăilescu, Țt.** Mașini de construcții, EDP, București, 1982
- Mihăilescu, Țt., Bratu, P., Goran, V.** Mașini de construcții, vol. I, II, Ed. Tehnică, București, 1986