Sinteza sistemelor dinamice în spaţiul stărilor cu grad maximal de stabilitate

Ion FIODOROV*, Aliona PUTERE**
**Universitatea Tehnică a Moldovei, fiodorov_ion@yahoo.com*
**Universitatea de Stat Agrară din Moldova

Abstract: **A method of synthesis of dynamic systems in states space with maximal stability degree is proposed in this paper. Synthesis algorithm of systems in states space with maximal stability degree for control of models'objects with known parameters is presented. In particular, a dynamic system in states space for control of model's object with third order inertia is designed in conformity of this method.**

Cuvinte-cheie: **sistem dinamic, spaţiul stărilor, relaţie vectorial-matricială, vectorul reacţiei după stare, sinteza sistemelor, grad maximal de stabilitate.**

I. INTRODUCERE

O descriere mai generală şi mai eficientă a sistemelor se obţine dacă în modelul matematic, pe lîngă informaţiile funcţionale intrare/ieşire se includ şi informaţii structurale prin intermediul unor variabile de stare. Cunoaşterea acestor variabile la orice moment de timp, permite în cazul cunoaşterii evoluţiei intrărilor – determinarea evoluţiei ieşirilor. Starea unui sistem reprezintă mulţimea minimă de variabile $x_1, x_2,...,x_n$ a căror cunoaştere (la momentul iniţial $t = t_0$) împreună cu semnalul de intrare în sistem, (pentru momentele $t \ge t_0$), determină complet comportarea sistemului în orice moment $t \ge t_0$ [1,2].

Reprezentarea modelului dinamic al sistemelor în spaţiul stărilor constituie o relaţie de tipul intrare-stare-ieşire. Pentru sistemele liniare şi continue monovariabile această relaţie este vectorial-matricială şi are următoarea formă analitică

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu; \\ y = c^T x. \end{cases} \qquad (1)$$

unde: x este vectorul de stare a sistemului $(n \times 1)$; y este mărimea de ieşire; u reprezintă mărimea de comandă; A este matricea de inerţie (de stare) de dimensiune $(n \times n)$; b este vectorul de comandă de dimensiune $(n \times 1)$; c este vectorul de ieşire $(n \times 1)$.

Pentru impunerea unui nou comportament dinamic se porneşte de la obiectul automatizării (1) care are variabilele de stare măsurabile. Mărimea de comandă u se obţine cu ajutorul relaţiei

$$u = -k^T x, \qquad (2)$$

în care k este vectorul parametrilor de acord $(n \times 1)$; x - vectorul de stare $(n \times 1)$.

Ca urmare, prin introducerea (2) în (1), obţinem

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax - bk^T x = (A - bk^T)x \qquad (3)$$

cu soluţia

$$x = e^{(A - bk^T)t} x(0), \qquad (4)$$

unde $x(0)$ este starea iniţială a sistemului.

Conform ecuaţiei (4) dinamica sistemului condus este determinată de valorile proprii ale matricei $[A - bk^T]$.

Procedura de sinteză a sistemelor dinamice în spaţiul stărilor constă din următorii paşi [1]:

1.Verificarea controlabilităţii

$$rang U = rang[b, Ab, ..., A^{n-1}b] = n, \qquad (5)$$

în caz contrar sistemul nu este controlabil şi acest algoritm nu poate fi utilizat.

2. Se determină polinomul caracteristic normalizat al matricei A:

$$\varphi_A(\lambda) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_0. \qquad (6)$$

3. Calcularea polinomului caracteristic, determinat de valorile proprii $[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ impuse sistemului

$$\begin{aligned} \varphi_c(\lambda) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)...(s - \lambda_n) = \\ &= s^n + q_{n-1}s^{n-1} + ... + q_0. \end{aligned} \qquad (7)$$

4. Se determină componentele vectorului de reacţie cu ajutorul următoarelor relaţii

$$k_i = q_i - \alpha_i; \; i = 0,1,...,(n-1). \qquad (8)$$

Alegerea noilor valori proprii este o problemă complexă care de obicei se soluţionează prin următoarele metode [2]:

- Metoda polilor dominanţi. În cazul acestei metode sinteza dinamicii sistemelor de ordinul doi cu ajutorul valorilor proprii este simplă, iar pentru sistemele de ordin superior $(n > 2)$ acest lucru este îngreunat de dificultăţile care apar la alocarea polilor sistemului, care ar asigura nişte indici de performanţă impuşi.
- Metoda conducerii optimale permite impunerea polilor cu ajutorul unei funcţii obiectiv care stabileşte legătura dintre eroarea semnalului şi consumul energetic al semnalului de conducere.

II. FORMULAREA ŞI SOLUŢIONAREA PROBLEMEI

După cum s-a menţionat mai sus cu ajutorul reacţiei după stare e posibil să schimbăm proprietăţile dinamice ale sistemului, alegând în mod dorit valorile proprii ale sistemului proiectat. În lucrarea dată se propune de a implementa un algoritm de sinteză a sistemelor dinamice în spaţiul stărilor cu grad maximal de stabiliate.

Problema sintezei sistemelor dinamice în spaţiul stărilor cu grad maximal de stabilitate poate fi formulată în felul următor. Se dă structura sistemului automat şi este necesar de a determina componentele vectorului de reacţie, astfel încât să se îndeplinească condiţia

$$J = \max_{k_i} \eta(k_i),\ i = 0,...,n-1, \qquad (9)$$

unde J este gradul maximal de stabilitate; η - gradul de stabilitate al sistemului; k_i - componentele vectorului de reacţie; n - gradul ecuaţiei caracteristice.

La baza soluţionării problemei formulate stă următoarea afirmaţie.

Afirmaţie. *Gradul de stabilitate maximal posibil al unui sistem poate fi atins atunci când părţile reale ale tuturor rădăcinilor ecuaţiei caracteristice sunt egale între ele* [4].

Presupunem că sistemul proiectat se caracterizează cu următoarea ecuaţie caracteristică

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0, \qquad (10)$$

unde a_j sunt coeficienţii polinomului de la numitorul funcţiei de transfer a modelului obiectului condus.

Ecuaţia caracteristică normalizată după a_0 capătă următoarea formă

$$A(p) = p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + ... + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0, \qquad (11)$$

unde $\alpha_0 = \frac{a_n}{a_0};\ \alpha_1 = \frac{a_{n-1}}{a_0};...;\alpha_{n-1} = \frac{a_1}{a_0}$.

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt, în general, perechi de rădăcini complexe:

$$p_k = \pm j\omega_k - \gamma_k\,, \qquad (12)$$

unde k este numărul de ordine a perechei de rădăcini complexe, ω_k - valoarea părţii imaginare a rădăcinii complexe p_k, γ_k - valoarea părţii reale a rădăcinii complexe. Însă pot fi şi rădăcini pur reale.

Reieşind din afirmaţia de mai sus şi substituind în (12)

$$\gamma_k = J\,, \qquad (13)$$

ecuaţia caracteristică (11) poate fi transcrisă prin descompunerea ei în n factori liniari:

$$A(p) = \prod_{k=1}^{z} (p - j\omega_k + J)(p + j\omega_k + J) \prod^{r} (p + J) = \\ = p^n + q_{n-1} p^{n-1} + ... + q_1 p + q_0 = 0, \qquad (14)$$

unde z este numărul perechilor de rădăcini complexe; r - numărul de rădăcini reale; $n = 2z + r$ - gradul ecuaţiei caracteristice a sistemului proiectat; $q_i = f_i(J, \omega_k),\ i = (0,...,n-1)$.

Expresiile (11) şi (14) sunt echivalente, deoarece reprezintă ecuaţiile caracteristice ale unuia şi aceluiaşi sistem automat. Din acest motiv coeficienţii de pe lângă variabilele de acelaşi ordin din ambele ecuaţii sunt egali între ei [3,5].

Reieşind din aceste considerente putem scrie următoarea egalitate

$$\alpha_1(a_0, a_{n-1}) = q_1(J, \omega_k)\,, \qquad (15)$$

de unde după unele transformări şi punând $\omega_k = 0$, obţinem expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al sistemului proiectat

$$J = f(a_0, a_{n-1})\,. \qquad (16)$$

Utilizând (8), pot fi determinate expresiile algebrice pentru calculul componentelor vectorului de reacţie

$$k_i = f(a_j, J, \omega_k)\,,\ i = (0,...,n-1)\,. \qquad (17)$$

În continuare, în baza studiului efectuat, se propune un algoritm de sinteză a sistemelor dinamice în spaţiul stărilor cu grad maximal de stabilitate.

III. ALGORITMUL DE SINTEZĂ A SISTEMELOR DINAMICE ÎN SPAŢIUL STĂRILOR

Algoritmul presupune parcurgerea următorilor paşi.

1. Se obţine ecuaţia diferenţială normalizată a sistemului cu parametrii cunoscuţi

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + ... + \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_0 y = \\ = b_{n-1} u^{(n-1)} + ... + b_1 u^{(1)} + b_0 u. \qquad (18)$$

2. Se determină ecuaţia diferenţială în formă vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu; \\ y = c^T x. \end{cases} \qquad (19)$$

3. Verificarea controlabilităţii

$$rangU = rang[b, Ab, ..., A^{n-1}b] = n\,. \qquad (20)$$

a. În cazul în care condiţia este îndeplinită sistemul este controlabil şi se poate trece la etapa următoare.
b. În caz contrar sistemul nu poate fi condus cu ajutorul acestui algoritm.

4. Se obţine polinomul caracteristic al matricei A:

$$\varphi_A(\lambda) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + ... + \alpha_0\,. \qquad (21)$$

5. Se determină ecuaţia caracteristică dorită, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate:
   - Utilizând substituţia $s_k = \pm j\omega_k - J$, ecuaţia caracteristică obţinută la pasul 4 se descompune în n factori liniari şi se aduce la forma

$$\varphi_c(\lambda) = \prod_{k=1}^{z} (s - j\omega_k + J)(s + j\omega_k + J) \prod^{r} (s + J) = \\ = s^n + q_{n-1} s^{n-1} + ... + q_1 s + q_0 = 0, \qquad (22)$$

   unde J este gradul maximal de stabilitate al sistemului; z - numărul perechilor de rădăcini complexe; r - numărul de rădăcini reale; $n = 2z + r$ - gradul ecuaţiei caracteristice a sistemului proiectat.
   - Din egalitatea

$$\alpha_1(a_0, a_{n-1}) = q_1(J, \omega_k),\ \omega_k = 0, \qquad (23)$$

   după unele transformări, obţinem expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al sistemului proiectat

$$J = f(a_0, a_{n-1}), \qquad (24)$$

   unde a_i - parametrii funcţiei de transfer a modelului obiectului reglat.

6. În conformitate cu coeficienţii ecuaţiilor caracteristice $\varphi_c(s)$, $\varphi_A(s)$ şi formulele

$$k_i = q_i - \alpha_i,\ i = 0,1,...,(n-1) \qquad (25)$$

se determină componentele vectorului de reacţie.

7. Variind partea imaginară a rădăcinilor complexe ω_k sau gradul de stabilitate J putem să impunem sau să optimizăm performanţele procesului indicial al sistemului dinamic proiectat: suprareglajul σ, gradul de amortizare ψ sau durata regimului tranzitoriu t_t.

IV. STUDII DE CAZ
ŞI SIMULARE PE CALCULATOR

Presupunem că pentru automatizarea proceselor tehnologice, modelul matematic al obiectului condus este prezentat prin intermediul modelului obiectului cu inerţie de gradul trei cu parametrii cunoscuţi

$$H_F(s) = \frac{3}{(0{,}5s+1)(s+1)(1{,}5s+1)} = \frac{3}{0{,}75s^3+2{,}75s^2+3s+1} = \frac{k}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (26)$$

Se cere de a sintetiza un sistem dinamic în spaţiul stărilor cu grad maximal de stabilitate ce include modelul obiectului condus (26).

1. Se obţine funcţia de transfer normalizată după a_0 a sistemului

$$H_F(s) = \frac{b_0}{s^3+\alpha_2 s^2+\alpha_1 s+\alpha_0} = \frac{4}{s^3+3{,}66s^2+4s+1{,}33}$$

unde $\alpha_0 = \frac{a_3}{a_0} = 1{,}33;\ \alpha_1 = \frac{a_2}{a_0} = 4;$

$$\alpha_2 = \frac{a_1}{a_0} = 3{,}66; b_0 = \frac{k}{a_0} = 4.$$

2. Determinăm ecuaţia diferenţială sub formă vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1{,}33 & -4 & -3{,}66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u;$$

$$y = c^T x = [4 \quad 0 \quad 0]\,x.$$

3. Verificăm controlabilitatea sistemului

$$rangU = rang[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b] = 3.$$

Deci sistemul este controlabil.

4. Se obţine polinomul caracteristic al matricei *A:*

$$\varphi_A(\lambda) = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = s^3 + 3{,}66s^2 + 4s + 1{,}33.$$

5. Se determină ecuaţia caracteristică dorită, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate:

- utilizând substituţia $s_k = \pm j\omega_k - J$, ecuaţia caracteristică obţinută la pasul 4 se descompune în 3 factori liniari şi se aduce la forma

$$\varphi_c(\lambda) = (s - j\omega_1 + J)(s + j\omega_1 + J)(s + J) =$$
$$= s^3 + 3Js^2 + (3J^2 + \omega_1^2)s + J^3 + \omega_1^2 J =$$
$$= s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 = 0,$$

- din egalitatea (23) obţinem expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al sistemului proiectat:

$$\frac{a_2}{a_0} = 3J^2 \Rightarrow$$
$$J = \sqrt{\frac{a_2}{3a_0}} = \sqrt{\frac{3}{3*0{,}75}} = 1{,}15.$$

6. În conformitate cu coeficienţii ecuaţiilor caracteristice $\varphi_c(s)$, $\varphi_A(s)$ şi expresiile (25) se determină componentele vectorului de reacţie care ar asigura un proces aperiodic (pentru $\omega_k = 0$)

$$k_0 = J^3 + \omega_1^2 J - \frac{a_3}{a_0} = 0{,}2;$$
$$k_1 = 2J^2 + \omega_1^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0;$$
$$k_2 = 3J - \frac{a_1}{a_0} = -0{,}21.$$

Pentru a putea aprecia rezultatele obţinute în urma aplicării algoritmului propus vom utiliza, pentru comparaţie, metodele Ziegler-Nichols şi optimizării parametrice. Rezultatele calculelor sunt prezentate mai jos:

- Metoda Ziegler-Nichols: k_p=1,692
- Metoda optimizării parametrice, aplicată în baza pachetului de programe KOPRAS: k_p=1,128

Pentru analiza performanţelor sistemelor sintetizate după metodele nominalizate mai sus, s-au efectuat simulări pe calculator utilizînd pachetul de programe KOPRAS. Rezultatele simulării sunt prezentate în figura 1. Numerotarea curbelor proceselor tranzitorii ale sistemului automat este următoarea: curba 1 reprezintă procesul tranzitoriu al sistemului automat sintetizat în baza criteriului gradul maximal de stabilitate în spaţiul stărilor; 2 – procesul tranzitoriu al SA proiectat după metoda optimizării parametrice; 3 – procesul tranzitoriu al SA sintetizat în conformitate cu metoda Ziegler-Nichols.

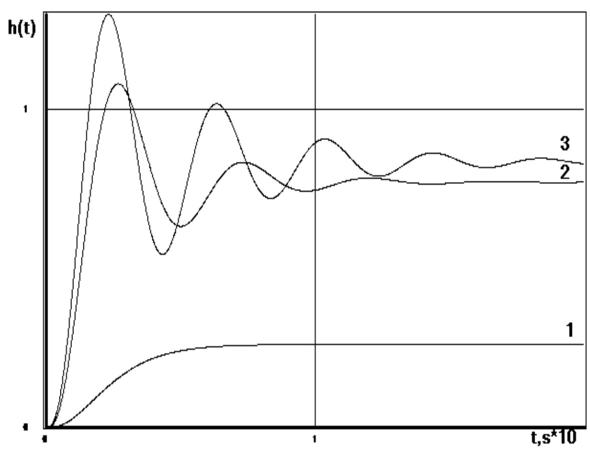

Fig. 1. Procese tranzitorii ale sistemului automat.

IV. CONCLUZII

Descrierea sistemelor automate prin formalismul intrare-stare-ieşire permite, după cum se cunoaşte, modificarea în mod dorit a dinamicii sistemelor proiectate prin impunerea valorilor proprii ale matricei de stare a sistemului. Însă alegerea valorilor proprii este o problemă destul de dificilă. În lucrarea dată se propune o metodă de sinteză a sistemelor dinamice în spaţiul stărilor, care permite de a determina şi impune anume acele valori proprii ale matricei de stare, care asigură gradul maximal de stabilitate al sistemului proiectat.

Totodată variind partea imaginară a rădăcinilor complexe ω_k sau gradul de stabilitate J putem să impunem sau să optimizăm performanţele procesului indicial al sistemului dinamic proiectat.

Metoda de proiectare propusă este o metodă simplă, iar datorită faptului că sistemul este prezentat în formă vectorial-matricială, algoritmul elaborat este uşor de implementat sub formă de programe pe calculator.

Efectuând o analiză a rezultatelor simulării pe calculator a sistemului proiectat în conformitate cu metoda propusă şi, pentru comparaţie, cu metodele Ziegler-Nichols şi Optimizării Parametrice, observăm că sistemul sintetizat în baza criteriului gradului maximal de stabilitate posedă performanţe mai ridicate în ceea ce priveşte stabilitatea, suprareglajul şi durata regimului tranzitoriu. Însă, după cum se observă din fig.1, eroarea statică, în acest caz, este mult mai mare.

REFERENCES

[1] Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы – 1976. 424 с.

[2] Pozna C. Teoria sistemelor automate. – Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004. – pp. 330.

[3] Загарий Г., Шубладзе А. Синтез систем управления на основе критерия максимальной степени устойчивости. – М.: Энергоатомиздат, - 1988. - 104 с.

[4] Ким Д. П., Дмитриева Н. Д. Сборник задач по теории автоматического управления – М.: Физматлит, - 2007. – 165с.

[5] Fiodorov I., Fiodorov O. Sinteza SRA cu performanţe impuse în baza criteriului gradului maximal de stabilitate / Proceedings of the 6th International Conference on “Microelectronics and Computer Science”, Chişinău, 2009, pp. 37-42.