

SIMULAREA ASISTATĂ DE CALCULATOR A UNOR OSCILAȚII NELINIARE

Nicolae Balmuș*, Ion Balmuș**, Alexandru Cojuhari*

*Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, **Universitatea Tehnică a Moldovei
n_balmus@mail.md; balmus@mail.utm.md; a_cojuhari@yahoo.com

Abstract: *In the present paper, the authors described the implementation conditions of the numerical experiments on a pendulum, suspension point of which vibrates (Kapitza's pendulum).*

Cuvinte-cheie: *modelare matematică, simulare, oscilații neliniare, oscilații parametrice, pendul inversat.*

I. Introducere

În lucrarea clasică a academicianului P.L.Capița [1] se menționează că pe parcursul ultimilor trei secole pendulul mecanic a fost cel mai studiat sistem oscilant. Aceste cercetări au început în secolul XVII, când Galileo Galilei a observat izohronicitatea perioadei oscilațiilor mici ale pendulului și a conceput primul ceas cu pendul. Problema mare a pendulului constă în neliniaritatea puternică a oscilațiilor sale. Din această cauză, practic, nici o problemă în care se studiază comportarea pendulului nu are soluții analitice exacte. În multe cazuri metodele numerice sunt unicele mijloace de soluționare a acestor probleme.

II. Rezolvarea numerică și simularea asistată de calculator a oscilațiilor pendulului matematic

Ecuția diferențială a oscilațiilor pendulului matematic de lungime L în câmpul de gravitație omogen cu intensitatea g , ușor se deduce în baza legii a II a lui Newton și are forma:

$$j\ddot{=} - \frac{g}{L} \sin(j) \quad (1)$$

unde φ este unghiul de abatere a pendulului din poziția de echilibru.

Ecuția (1) este importantă pentru testarea metodelor numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale din două puncte de vedere: 1-este puternic neliniară și nu posedă soluții analitice; 2-soluțiile ei $j(t)$ și $j\dot{(t)}$ intră în expresia pentru energia totală a sistemului

$$E(t) = \frac{L^2 j\dot{^2}(t)}{2} + Lg(1 - \cos(j(t))) = const \quad (2)$$

care conform legii conservării trebuie să rămână constantă pe parcursul timpului. Acest moment poate fi utilizat pentru verificarea corectitudinii soluțiilor numerice.

Soluțiile numerice $j(t)$ și $j\dot{(t)}$ se determină în timp real cu ajutorul procedurilor Delphi descrise în lucrarea [2]. Precizia de rezolvare numerică a ecuației (1) se verifică indirect cu ajutorul legii conservării energiei

În figura 1 prezentăm rezultatele experimentului numeric realizat în timp real pe parcursul intervalului de timp 1000s. În acest interval de timp forma oscilațiilor nu s-a modificat, iar energia totală a variat în intervalul $\pm 5E-9$. Acest rezultat demonstrează cert corectitudinea calculului și eficiența algoritmului Runge-Kutta.

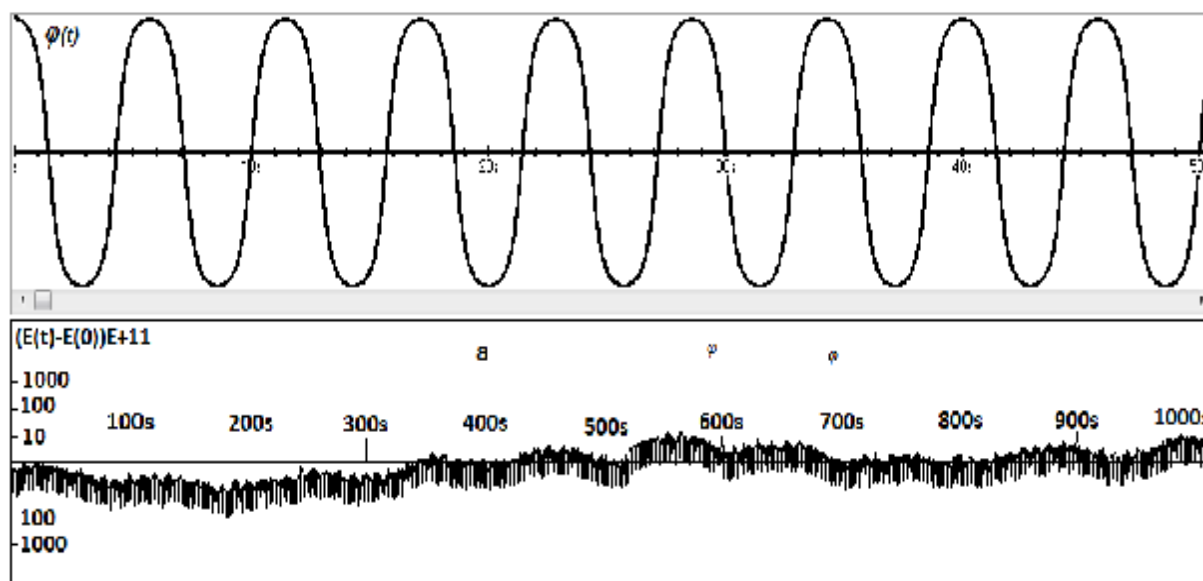


Fig. 1. Rezultatul simulării oscilațiilor mari ale pendulului matematic și evoluția erorii de calcul numeric.

III. Simularea asistată de calculator a fenomenului de rezonanță parametrică a pendulului matematic

Considerăm că punctul de suspensie a pendulului matematic efectuează în direcția verticală oscilații armonice cu frecvența circulară ω și amplitudinea A . Ecuația diferențială care descrie mișcările pendulului în acest caz are forma:

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{g}{L} - \frac{A}{L}\omega^2 \cos(\omega t)\right) \sin(\varphi) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad (3)$$

unde prin γ este notat coeficientul de rezistență fluidă a mediului în care se produc oscilațiile pendulului.

Interfața aplicației cu ajutorul căreia se studiază rezonanța parametrică a pendulului matematic este prezentată în figura 2.

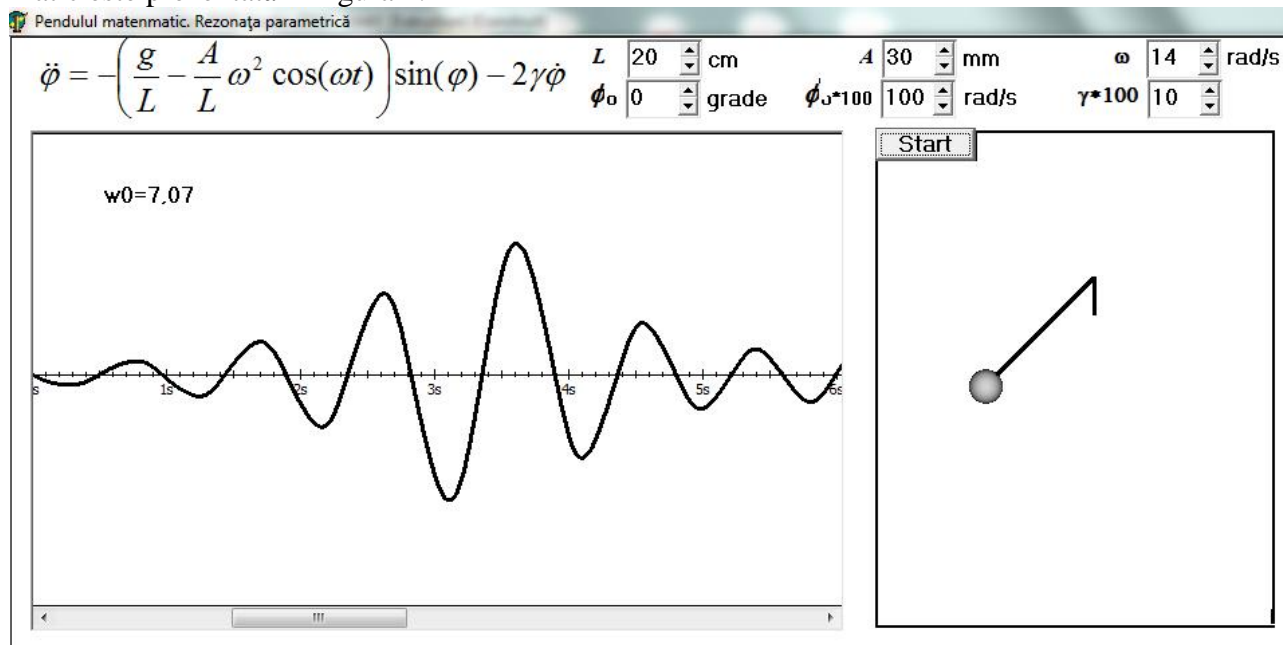


Figura 2. Rezonanța parametrică a oscilațiilor pendulului matematic.

În figura 2 se văd toți parametrii pe care utilizatorul îi poate modifica în procesul de studiere a fenomenului de rezonanță parametrică a pendulului matematic. Concluzia principală a acestui experiment numeric este determinarea frecvenței excitatorului pentru care se observă vizual rezonanța parametrică. Conform teoriei această frecvență trebuie să fie dublă față de frecvența proprie a pendulului matematic. Acest rezultat este reprezentat în figura 2, unde $w_0 \approx 7 \text{ rad/s}$, iar $w = 14 \text{ rad/s}$.

IV. Simularea asistată de calculator a oscilațiilor pendulului Capița

În procesul de studiere a rezonanței parametrice a pendulului sa observat că în anumite condiții pendulul fizic efectuează oscilații în poziție verticală. Teoria acestui fenomen a fost elaborată de P.L.Capița și publicată [1,2] în anul 1951. După aceste publicații respectivul dispozitiv a fost numit „Pendulul Capița”.

Pendulul Capița este un pendul fizic cu caracteristici apropiate de cele ale unui pendul matematic punctul de suspensie al căruia oscilează în direcție verticală. În lucrările [1,2] se dau dimensiunile pendulului și caracteristicile sursei de vibrații în baza cărora relativ simplu se poate de construit dispozitivul.

Ecuția diferențială care descrie mișcările pendulului Capița este dedusă în [1,2] și este reprodusă în (1). Pentru rezolvare aproximativă a ecuației (1), Capița a divizat mișcarea compusă a pendulului inversat în două mișcări: lentă și rapidă. În rezultatul studierii acestor mișcări a fost dedusă condiția de stabilitate dinamică a oscilațiilor pendulului inversat:

$$\frac{Aw}{Lw_0} \geq 2 \quad (4)$$

și valoarea maximală a unghiului de abatere a pendulului inversat din poziția de echilibru inversat ($\varphi = \pi$)

$$\cos(q_{\max}) = 2 \left(\frac{Lw_0}{Aw} \right)^2 \quad (5)$$

Condițiile (4) și (5) sunt deduse într-un mod mai accesibil în lucrarea [4]. De asemenea în această lucrare sunt deduse formulele pentru frecvența oscilațiilor mici ale pendulului în jurul ambelor poziții de echilibru:

$$w_{up}^2 = \frac{a^2 w^2}{2L^2} - w_0^2, \quad (5)$$

$$w_{down}^2 = \frac{a^2 w^2}{2L^2} + w_0^2 \quad (6)$$

Scopul principal al acestei lucrări este implementarea pe calculator a unei aplicații interactive pentru realizarea experimentelor numerice asupra pendulului Capița. Formulele (4)-(6) sunt utilizate pentru verificarea corectitudinii calculului numeric în baza cărora se realizează animațiile interactive.

Fereastra principală a aplicației este prezentată în figura 3. În această fereastră utilizatorul poate seta valorile tuturor mărimilor fizice care intervin în ecuația diferențială (1) și condițiile inițiale (viteza unghiulară și unghiul inițial de abatere a pendulului). După apăsarea butonului **Start** pendulul începe efectuarea oscilațiilor. O condiție importantă pentru realizarea oscilațiilor pendulului inversat este criteriul (4). Valoarea corespunzătoare acestui criteriu se afișează în fereastra aplicației. Graficele din fereastra aplicației servesc pentru documentare și verificarea cantitativă a rezultatelor experimentului numeric.

În figura 3 sunt reprezentate oscilațiile corespunzătoare echilibrului stabil sus (up) și jos

(down). Perioadele calculate din aceste reprezentări grafice corespund relațiilor (5) și (6). De asemenea se verifică corect relația (5) în care se determină amplitudinea maximală a oscilațiilor pendulului inversat. Deosebit de importantă este aplicația în cazul când se studiază oscilațiile mari ale pendulului inversat pentru care nu există cercetări teoretice.

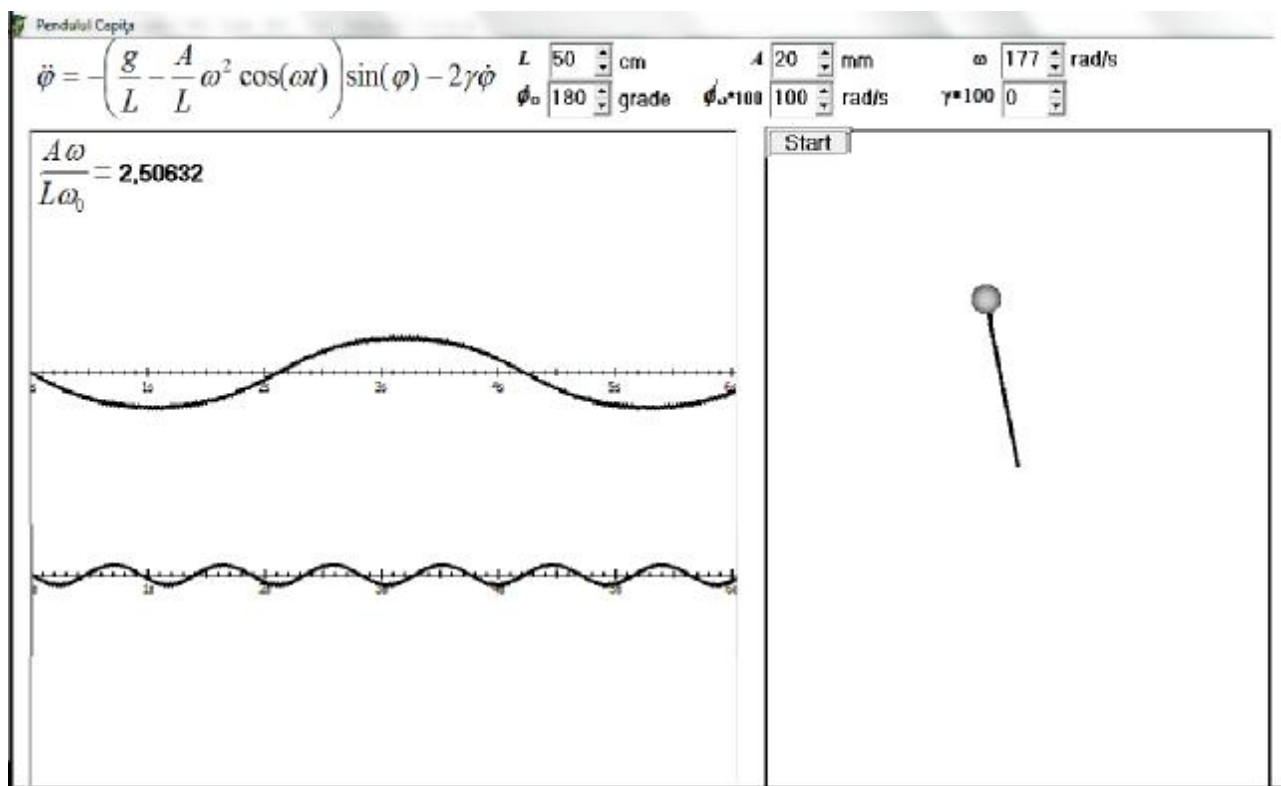


Figura 3. Interfața aplicației pentru studierea oscilațiilor pendulului inversat

V. Concluzii

Scopul experimentelor numerice descrise în lucrare nu este substituirea experimentelor reale realizate în laborator; în linii mari experimentul numeric completează experimentul real cu informații utile la etapa de planificare și realizare a instalațiilor tehnice. În cazul procesului de instruire experimentul numeric reduce substanțial timpul necesar pentru demonstrarea fenomenelor fizice și realizarea lucrărilor de laborator.

VI. Referințe

1. П. Л. Капица “Маятник с вибрирующим подвесом” *УФН*, 1951, **44**, 7 – 20.
2. П. Л. Капица “Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке под-веса” *ЖЭТФ*, 1951, **21**, 588 – 597
3. N.Balmus, I.Balmus “Modelarea matematică și elaborarea software-lor pentru simularea în timp real a problemelor de dinamică cu multe grade de libertate” *Meridian ingineresc*, 2007, 1, 59-67.
4. E. I. Butikov “On the dynamic stabilization of an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* 2001.