INFLUENȚA FORMEI ȘI ROTAȚIEI PĂMÂNTULUI ASUPRA FORȚEI DE GREUTATE A CORPULUI

Autori: Țopa Mihai [1], Lilia Socolov [1,2]

[1]Universitatea Tehnică a Moldovei, [2]Asociaţia Inginerilor de Instalaţii din Republica Moldova

Rezumat: *Lucrarea îşi propune că scop prezentarea influenții rotației și formei Pământului asupra forței de greutate a corpului, și dependența forței de greutate a corpurilor de latitudinea geografica.*

Cuvinte cheie: *Forța de atracție universală, elipsoid de rotație, accelerație de transport, latitudine.*

1.Introducere

Pământul se consideră un elipsoid de rotație ,turtit la poli ,omogen ce se rotește uniform. Forța de greutate a unui corp pe suprafața Pământului reprezinta rezultanta forței de atracție universale orientata spre centrul Pământului și a forței de inerție de transport orientate perpendicular pe axa lui de rotație. Forța de greutate a corpului depinde de latitudinea geografica a lui pe suprafața Pământului.

2.Conținutul lucrarii

Consideram Pământul un elipsoid de rotație turtit la poli, omogen și care se rotește uniform în jurul axei sale. Vom studia echilibrul unui punct material aflat la suprafața Pământului. Alegem un sistem inertial de referință cu originea în centrul O al Pământului așa încît planul său de coordinate Oxy sa coincidă cu planul ecuatorial al Pământului, iar axa Oz pozitiva să treacă prin polul nord al Pământului. Sistemul relativ il legam invariabil de Pământ astfel încît originea lui sa fie în centrul Pământului și axa Oz, pozitivă să treacă prin polul nord. Consideram un punct material suspendat de un fir. Accelerația de transport a unui punct al Pământului situat la latitudinea λ este:

$$a_c = \omega^2 \rho \cos\lambda \tag{1}$$

unde: $\omega = 2\pi/(24 \cdot 3600)\, s^{-1}$ este viteza unghiulara a Pământului ,

ρ -distanța de la punct la axa de rotație .

Conform ecuației de echilibru relativ:

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{T} = 0 \tag{2}$$

unde: F- forța de atracție universală a Pamântului ,

F_C =m a_c -forța de inerție de transport,

T-forța de tensiune în fir.

Reacțiunea în fir este numeric egala cu greutatea G și este orientata în sens opus. De aceea:

$$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_C} \tag{3}$$

Greutatea corpului este egală cu rezultanta forțelor gravitaționale și de inerție de transport.
Poziția punctului M(x,y,z) în coordonate sferice va fi :

$$\begin{aligned} x &= r\cos\lambda\cos\varphi, \\ y &= r\cos\lambda\sin\varphi, \\ z &= r\sin\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

unde : $\lambda -$latitudinea, $\varphi -$longitudinea punctului.
Consideram Pământul un elipsoid turtit.Ecuația lui este:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5}$$

unde : a, c – semiaxa mare și cea mică a elipsoidului ($a > c$).Notăm $a^2 - c^2 = c^2 l^2$ și $\sin\lambda = \nu$ și obținem:

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + l^2\nu^2}} \tag{6}$$

Funcția de forțe a Pamântului asupra unui punct material de masa egala cu o unitate poate fi prezentata astfel :

$$U(r,\lambda) = 3Mf \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (lc)^{2n} P_{2n}(\sin\lambda)}{(2n+1)(2n+3)r^{2n+1}} \tag{7}$$

unde: M- masa Pământului, f -constanta atracției universale, $P_{2n}(\sin\lambda)$ -polinomul lui Legandre.
Proiecția forței de atracție pe direcția razei vectoare a punctului M va fi :

$$F_r = \frac{\partial U}{\partial r} = 3Mf \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} (lc)^{2n} P_{2n}(\sin\lambda)}{(2n+3)\cdot r^{2(n+1)}} \tag{8.1}$$

unde: $P_n(\nu) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!} \dfrac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}$,

$P_0(\nu) = 1$, $P_1(\nu) = \nu$, $P_2(\nu) = \dfrac{3}{2}\nu^2 - \dfrac{1}{2}$, $P_3(\nu) = \dfrac{5}{2}\nu^3 - \dfrac{3}{2}\nu$, $P_4(\nu) = \dfrac{35}{8}\nu^4 - \dfrac{15}{4}\nu^2 + \dfrac{3}{8}$,
$P_6(\nu) = \dfrac{231}{16}\nu^6 - \dfrac{315}{16}\nu^4 + \dfrac{105}{16}\nu^2 - \dfrac{5}{16}$.

Sau $$F_r = \frac{Mf}{r^2}\left\{-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} 3(lc)^{2n} P_{2n}(\sin\lambda)}{(2n+3)r^{2n}}\right\} \tag{8.2}$$

La polii Pământului $\lambda = 90°$,forța de greutate a corpului cu masa de 1 kg. este egala cu forța de atracție a Pământului:

$$P_0(1) = P_2(1) = P_4(1) = P_6(1) = 1$$

Forța de greutate a unui corp cu masa de 1 kg. la polii Pământului poate fi calculata astfel :

$$\begin{aligned} G_p &= \frac{fM}{R_p^2}\left\{1 - \frac{3}{5}\frac{(R_e^2 - R_p^2)}{R_e^2} + \frac{3}{7}\frac{(R_e^2 - R_p^2)^2}{R_e^4} - \cdots\right\} = \\ &= \frac{fM}{R_p^2}\left\{1 - \frac{3}{5}\left[\left(\frac{R_e}{R_p^2}\right)^2 - 1\right] + \frac{3}{7}\left[\left(\frac{R_e}{R_e^2}\right)^2 - 1\right]^2 - \cdots\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Considerăm $f = 6{,}675 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg \cdot s^{-2}}$, $M = 5{,}972 \cdot 10^{24} kg$, $R_p = 6356752 m$ $R_e = 6378137.m$.

Atunci $\left(\dfrac{R_e}{R_e^2}\right)^2 - 1$=0,00674 și obținem :

$$G_p = 9{,}865 \cdot \{1 - 0{,}004\} = 9{,}8255 \approx 9{,}826(N).$$

Pentru un corp cu masa de o unitate aflat la ecuatorul Pământului avem forța de atracție universală:

$$G_F = \frac{fM}{R_p^2}\left\{1 + \frac{3}{5}\frac{(R_e^2 - R_p^2)}{R_e^2}\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\left(\frac{R_e^2 - R_p^2}{R_e^2}\right)^2 \frac{3}{8} + \cdots\right\} = 9{,}7990 \cdot 1{,}002 = 9{,}819(N) \tag{10}$$

și forța de inerție de transport :

$$F_c = m\varpi^2 R_e = 0{,}034 N. \tag{11}$$

Forța de greutate la ecuator:

$$G_e = G_F - F_c = 9{,}785 N \tag{12}$$

La o latitudine λ forța de greutate va fi :

$$\begin{aligned} G_\lambda^2 &= G_F^2 + F_{C\lambda}^2 - 2G_F F_{C\lambda} \cos\lambda = \\ &= G_F^2 + m^2\omega^4 R_1^2 \cos^2\lambda - 2G_F m\ \omega^2 R_1 \cos^2\lambda \end{aligned} \tag{13}$$

Neglijam termenul cu ω^4 și obținem pentru m=1 kg :

$$G_\lambda = G_F\sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R_1 \cos^2\lambda}{G_F}} \approx G_F\left(1 - \frac{\omega^2 R_1 \cos^2\lambda}{G_F}\right) = G_F - \omega^2 R_1 \cos^2\lambda \tag{14}$$

unde : $R_1 = \dfrac{R_e * R_p}{\sqrt{R_p^2 * \cos^2\lambda + R_e^2 * \sin^2\lambda}}$ este raza Pămintului la latitudinea λ.

La latitudinea $\lambda = 45°$ obținem:

$$G_{\lambda=45°} = \frac{f*M}{R_1^2}\left\{1-\frac{3}{5}\frac{(R_e^2-R_p^2)}{R_1^2}\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\frac{(R_e^2-R_p^2)^2}{R_1^4}\frac{13}{32}+\cdots\right\}-\omega^2 R_1\cos^2\lambda =$$
$$= 9{,}832\cdot 0{,}9990 - 0{,}017 = 9{,}805N \qquad (15)$$

unde: $R_1 = 6367417\,m$.

Forța de greutate $\vec{G}$ se abate de la direcția razei Pământului la un unghi α :

$$\sin\alpha = \frac{a_c \sin\lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_1 \cos\lambda \sin\lambda}{G_F - \omega^2 R_1 \cos^2\lambda} \approx \frac{\omega^2 R_1^3 \sin 2\lambda}{2fM} \qquad (16)$$

Pentru $\lambda = 45°$ $\sin\alpha = 0{,}0017$ $\alpha \cong 6'$.

3.Concluzii:

Forța de greutate a unui corp pe suprafața Pământului consta din forța de atracție universală spre centrul Pământului și forța de inerție de transport orientată perpendicular pe axa de rotație a Pământului. A doua forța variază de la zero pînă la valoarea maximă care constituie doar 1/290 parte din forța de atracție.
Abaterea maximă a forței de greutate de la raza Pământului la latitudinea $\lambda = 45°$
este aproximativ de $\alpha \cong 6'$.

Bibliografie :

1. Дубошин Г. Н. „Небесная механика” , изд-во Наука, Москва, 1968, p.799.
2.Draganu Mircea „Introducerea matematica în fizica teoretica modernă”
. I .Editura Tehnica ,București ,1957, p.643.
3. Голубева О. В. „Теоретическая механика” изд-во Высшая школа, Москва, 1976 , p.350
4.Caragangiu V., Calpagiu M., Țopa M. „Mecanica teoretică”, Editura „Știința” , Chișinau, 1994, p.471