UNELE MODURI DE DEFINIRE A LINIILOR

Ana NICHIFOR, grupa IAPC - 1505

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *The paper is a synthesis of the main methods of lines definition. The line is examined as the intersection of two surfaces, as the graph of a function or of an equation. A special attention is paid to the lines defined parametrically and to the ones which represent the graphs of functions in the polar coordinate system. Examples are given for each case.*

Cuvinte cheie: *graficul ecuaţiei, ecuaţii parametrice, secţiuni conice, coordonate polare.*

Liniile, curbe sau drepte, sunt prezente la tot pasul. Cel mai frecvent, ele se întâlnesc în matematică, mai ales, în geometrie. Ne propunem să examinăm unele moduri de definire a liniilor.

1. Linia ca intersecţia a două suprafeţe. De obicei, intersecţia a două suprafeţe este o linie. Cea mai simplă linie, dreapta poate fi considerată ca intersecţia a două plane. Mai puţin triviale sunt liniile de intersecţie ale unei suprafeţe conice cu un plan. În dependenţă de poziţia reciprocă a acestora, se poate obţine una din 4 linii: cercul, elipsa, hiperbola sau parabola, numite secţiuni conice sau, mai simplu, conice. Aceste linii erau bine cunoscute încă de grecii antici. Mult mai târziu, după apariţia sistemului de coordonate, aceste linii au mai fost numite şi linii de ordinul doi.

Intersecţia suprafeţei cu un plan se foloseşte şi la studiul acestei suprafeţe, procedeul fiind numit *metoda secţiunilor*. De exemplu, pentru a preciza forma unui paraboloid eliptic, determinat de ecuaţia $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, se studiază intersecţia acestei suprafeţe cu planele de coordonate şi cu plane, paralele planului *XOY*.

2. Linia ca loc geometric de puncte. Linia poate fi definită şi ca un loc geometric de puncte, adică ca o mulţime de puncte, care satisfac o anumită condiţie, bine determinată. De exemplu, parabola este locul geometric de puncte egal depărtate de un punct dat (focarul) şi de o dreaptă dată (directoarea). De altfel, toate secţiunile conice mai admit şi definirea lor ca loc geometric de puncte.

3. Linia ca graficul funcţiei sau al ecuaţiei. Elaborarea de către R. Decart a sistemului de coordonate (sec.18) a făcut mai accesibilă studierea multor linii. Examinate într-un sistem cartezian de coordonate, studiul liniilor se reduce la studiul ecuaţiilor, astfel stabilindu-se o legătură strânsă între obiectele geometrice şi noţiunile algebrice.

3.1. Linia ca graficul unei funcţii. De obicei, graficul unei funcţii este o linie. Pentru construirea acestei linii se folosesc câteva metode.

a) Aflând câteva puncte ale graficului, acestea se unesc printr-o linie continuă.

b) Transformând graficele unor funcţii cunoscute deja, se obţine graficul funcţiei date.

c) Studiind funcţia cu ajutorul derivatei, se trasează graficul ei.

3.2. Linia ca graficul unei ecuaţii. Nu orice linie este graficul unei funcţii. De exemplu, cercul de rază R cu centrul în originea de coordonate poate fi privit doar ca reuniunea graficelor a două funcţii: $y=\sqrt{R^2-x^2}$ pentru semicercul de sus şi $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ pentru semicercul de jos. În multe cazuri, această lacună poate fi înlăturată. Astfel, cercul amintit este graficul ecuaţiei $x^2+y^2=R^2$.

3.3. Linii, definite parametric. Două funcţii continue $x=x(t)$ şi $y=y(t)$ cu $t\in D$, determină o linie în felul următor. Oricărei valori a parametrului $t\in D$ îi corespunde un punct *M* cu coordonatele (x, y), calculate conform formulelor $x=x(t)$, $y=y(t)$. Mulţimea tuturor asemenea puncte *M* reprezintă o linie. În diferite cazuri, parametrul *t* poate fi timp, unghi etc. Vom examina, în acest sens, două exemple.

Exemplul 1. Punctul *M* împarte segmentul *AB* astfel că $AM=a, BM=b$. Segmentul lunecă astfel încât extremităţile lui rămân pe axele de coordonate: $A\in OY$, $B\in OX$. Să se determine traiectoria punctului *M*.

Notăm cu *t* mărimea unghiului *ABO*, format de segment cu axa *OX* (Fig.1). Coordonatele (x, y) ale punctului *M* se află fără dificultate: $x=a\cdot\cos t$, $y=b\cdot\sin t$. Aceste ecuaţii şi reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei. E bine cunoscut însă, că aceste ecuaţii sunt exact ecuaţiile parametrice ale elipsei cu semiaxele a şi b. Prin urmare, punctul M va descrie o elipsă. În particular, dacă M este mijlocul segmentului AB, elipsa devine cerc.

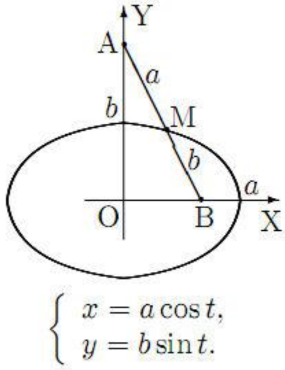

Fig.1.

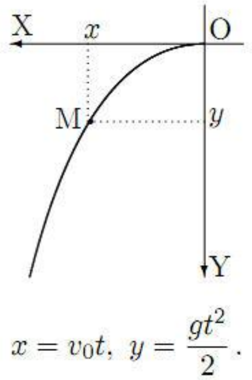

Fig.2.

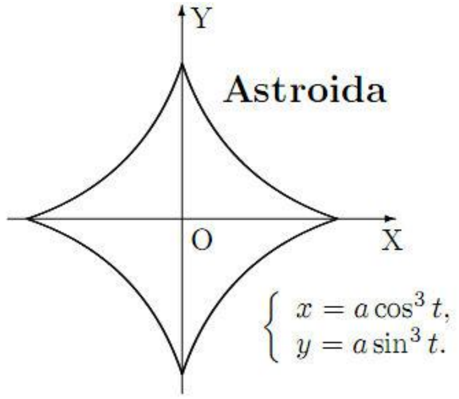

Fig.3.

Exemplul 2. Dintr-un avion, ce zboară rectiliniu, orizontal şi cu o viteză constantă v_0, se desprinde un obiect greu (de exemplu, o bombă). Să se determine traiectoria, pe care o descrie obiectul în cădere, dacă rezistenţa aerului se neglijează.

Introducem sistemul de coordonate XOY astfel încât axa OX să coincidă cu direcţia de zbor a avionului, O să fie punctul în care obiectul s-a desprins din avion, iar axa OX să fie orientată vertical în jos (Fig.2). Fie că în momentul de timp t ($t > 0$) obiectul se află în punctul $M(x,y)$. Obiectul participă la două mişcări. Cea orizontală, constantă, ne permite să aflăm $x = Ox = v_0 t$. Cea verticală este căderea liberă, deci $y = Oy = \frac{gt^2}{2}$. Ecuaţiile $x = v_0 t$ şi $y = \frac{gt^2}{2}$ constituie exact ecuaţiile parametrice ale traiectoriei căderii obiectului. Excluzând din aceste ecuaţii parametrul t, se obţine ecuaţia unei parabole care şi reprezintă traiectoria mişcării. În mod absolut asemănător, se poate determina traiectoria unui glonte sau proiectil, care porneşte sub un careva unghi faţă de orizontală. În aceste cazuri, rolul parametrului t îi revine timpului. Dintre liniile definite parametric mai menţionăm *astroida* (Fig.3) şi *cicloida*, detaliat studiată în [1].

4. Liniile în sistemul polar de coordonate. Sistemul de coordonate XOY este cel mai cunoscut şi cel mai eficient, dar nu unicul. Sistemul polar de coordonate oferă noi posibilităţi de studiere a liniilor. Şi în acest sistem se examinează grafice ale funcţiilor $\rho = \rho(\varphi)$. Multe din ele au forme exotice, neîntâlnite în sistemul cartezian. De exemplu, graficul funcţiei simple $\rho = a\varphi$, unde $a \in R,\ a > 0$ reprezintă *spirala lui Arhimede.* În coordonate carteziene această linie are o ecuaţie mult mai complexă. Dintre liniile în sistemul polar

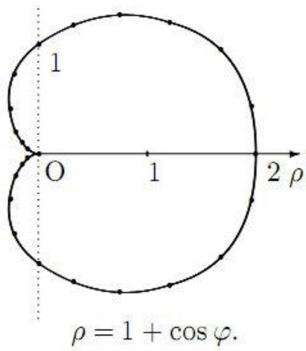

Fig.4.

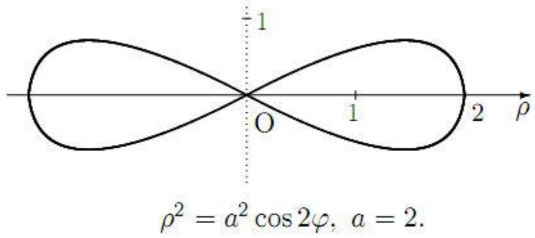

Fig.5.

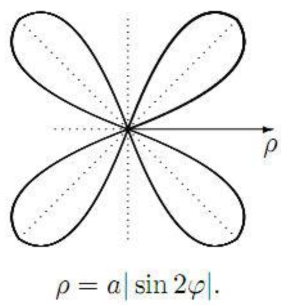

Fig.6.

menţionăm *cardioida* (Fig.4), lemniscata lui Bernoulli (Fig.5) şi *roza cu 4 petale* (Fig.6).

Bibliografie

1. Берман, Г. Н. *Циклоида*. М, Наука, 1980.