

Колебания Грузика на Двух Взаимно Перпендикулярных Пружинках

Штацкая Н.С., Хаджи П.И.

Приднестровский государственный университет им. Т.Г.Шевченко

Молдова, Тирасполь

Институт прикладной физики АНМ

Молдова, Кишинев

natali_novickaya@mail.ru

Abstract – This article shows that the linear spring pendulum can perform nonlinear oscillations. At the same time, and the amplitude of the oscillations is essentially dependent of the initial displacement and the initial velocity of the pendulum.

Простой гармонический осциллятор представляет собой физическую систему, состоящую из грузика массой m , прикрепленного к одному концу невесомой пружинки с коэффициентом упругости k , другой конец которой закреплен неподвижно (рис.1). При смещении грузика вдоль оси пружинки на расстояние x , на много меньшее длины недеформированной пружинки, имеют место линейные гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$.

Вместе с тем, этот же осциллятор оказывается существенно нелинейным, если малые смещения грузика происходят в направлении, перпендикулярном к оси пружинки в недеформированном состоянии. Таким образом, один и тот же осциллятор в зависимости от направления, в котором происходят колебания грузика по отношению к направлению оси пружинки, может рассматриваться как линейное, так и нелинейное физическое устройство. Поскольку такая нелинейность обусловлена только изменением геометрии системы, то ее можно назвать геометрической нелинейностью. Здесь геометрическая нелинейность обусловлена наложением определенных связей на направление движения грузика, что и является причиной ее возникновения. Следует подчеркнуть, что эта нелинейность проявляется в рамках справедливости линейного закона Гука. Выход за рамки линейного закона Гука может также привести к нелинейным колебаниям при продольном смещении грузика, так как в этом случае коэффициент упругости пружинки начинает зависеть от величины ее деформации (от величины смещения грузика относительно положения равновесия).

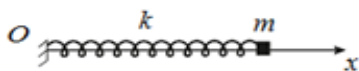


Рис.1. Схема простейшего пружинного маятника.

Рассмотрим колебания тела в простой модели пружинного осциллятора, представленного на рис.2. Осциллятор состоит из грузика массой m , который может

перемещаться без трения вдоль направляющей O_1x в горизонтальной плоскости. К грузику прикреплены две невесомые пружинки с коэффициентами упругости k_1 и k_2 и длинами l_1 и l_2 в ненапряженном состоянии соответственно. Вторые концы пружинки закреплены неподвижно в точках O_1 и O_2 соответственно. Одна из пружинки расположена вдоль направляющей O_1x , а вторая – перпендикулярно этой направляющей (рис.2а). В положении равновесия обе пружинки не напряжены и образуют прямой угол (рис.2а).

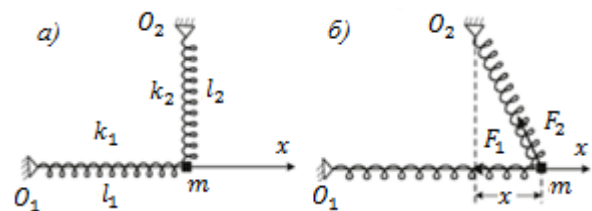


Рис.2. Модель нелинейного пружинного маятника а) в положении равновесия и б) при смещении из положения равновесия.

Выведем систему из положения равновесия, сместив грузик вправо на расстояние x (рис.2б). В результате этого обе пружинки оказываются растянутыми. Возникают силы упругости, действующие на грузик (рис.2б). Если теперь систему предоставить самой себе, то возникнут колебания грузика вдоль направляющей O_1x . Сила F_1 , действующая на грузик со стороны первой пружинки, в рамках справедливости линейного закона Гука, определяется выражением $F_1 = k_1x$. Сила упругости F_2 , обусловленная растяжением второй пружинки, равна $F_2 = k_2 \cdot \Delta l$, где Δl – удлинение пружинки при смещении грузика. Из рис.2б видно, что

$$\Delta l = \sqrt{l_2^2 + x^2} - l_2.$$

В рамках линейного закона Гука $x \ll l_2$, разлагая Δl в ряд по степеням малой величины $\frac{x}{l_2}$, получаем $\Delta l = \frac{x^2}{(2l_2)}$.

Тогда $F_2 = \frac{k_2x^2}{(2l_2)}$. Возвращающей силой F_{2x} со стороны

второй пружинки является проекция силы F_2 на направляющую O_1x :

$$F_{2x} = F_2 \cdot x/l_2 = k_2 x^3/(2l_2^2).$$

Таким образом видно, что сила F_1 , действующая на грузик со стороны первой пружинки в продольном направлении, является линейной силой по смещению x грузика, тогда как сила F_{2x} , действующая со стороны второй, перпендикулярно ориентированной пружинки, пропорциональна кубу смещения, то есть является существенно нелинейной силой. Отметим еще раз, что обе силы получены в рамках справедливости линейного закона Гука. Уравнение Ньютона, описывающее временную эволюцию смещения грузика из положения равновесия, имеет вид:

$$m\ddot{x} = -k_1x - \frac{k_2x^3}{2l_2^2} \quad (1)$$

Колебания, описываемые уравнением (1), являются нелинейными. Вводя собственные частоты

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}, \text{ уравнение (1) принимает вид}$$

$$\ddot{x} = -\omega_1^2x - \frac{\omega_2^2x^3}{2l_2^2}. \quad (2)$$

Первый интеграл этого уравнения представляется выражением

$$\dot{x}^2 + \omega_1^2x^2 + \frac{\omega_2^2x^4}{4l_2^2} = v_0^2 + \omega_1^2x_0^2 + \frac{\omega_2^2x_0^4}{4l_2^2} \quad (3)$$

где x_0 и v_0 – начальное смещение и начальная скорость грузика. Выражение (3) представляет собой закон сохранения энергии: сохраняется сумма кинетической и потенциальной энергий системы. На рис.3 представлен график скорости движения грузика $\dot{x} = v$ в зависимости от смещения x . Видно, что имеет место уплощение графика в окрестности точек $v = 0$ и $x = 0$ по сравнению с аналогичным графиком для линейного осциллятора.

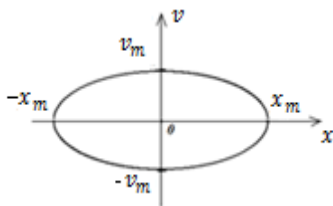


Рис.3. График зависимости скорости движения от смещения грузика.

Скорость и координата грузика периодически изменяются в пределах $-v_m \leq v \leq v_m$, $-x_m \leq x \leq x_m$, где v_m и x_m – максимальные значения скорости и смещения соответственно, которые определяются выражениями:

$$v_m^2 = v_0^2 + \omega_1^2x_0^2 + \frac{\omega_2^2x_0^4}{4l_2^2}$$

$$x_m^2 = \sqrt{\left(x_0^2 + 2l_1^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) + 4l_2^2 \frac{v_0^2}{\omega_2^2} - 2l_2^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \quad (4)$$

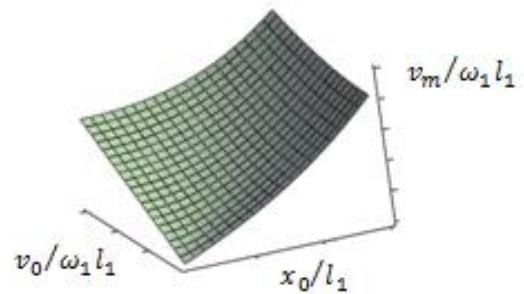


Рис.4. Зависимость максимальной скорости от начальной скорости и начального смещения.

Решая уравнение (3), получаем

$$x = \frac{x_m \sqrt{x_m^2 \omega_2^2 + 4l_2^2 \omega_1^2}}{\sqrt{2(x_m^2 \omega_2^2) + 2l_2^2 \omega_1^2}} \frac{\operatorname{sn}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}l_2} \sqrt{x_m^2 \omega_2^2 + 2l_2^2 \omega_1^2} t + F(\varphi_0, k)\right)}{\operatorname{dn}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}l_2} \sqrt{x_m^2 \omega_2^2 + 2l_2^2 \omega_1^2} t + F(\varphi_0, k)\right)} \quad (5)$$

где $\operatorname{sn}(x)$ и $\operatorname{dn}(x)$ – эллиптические функции Якоби с модулем k , $F(\varphi_0, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k и параметром φ_0 [1], которые выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{x_m^2 \omega_2^2}{2(x_m^2 \omega_2^2 + 2l_2^2 \omega_1^2)},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \left(\frac{x_0}{x_m} \sqrt{\frac{2(x_m^2 \omega_2^2 + 2l_2^2 \omega_1^2)}{(x_0^2 + x_m^2) \omega_2^2 + 4l_2^2 \omega_1^2}} \right). \quad (6)$$

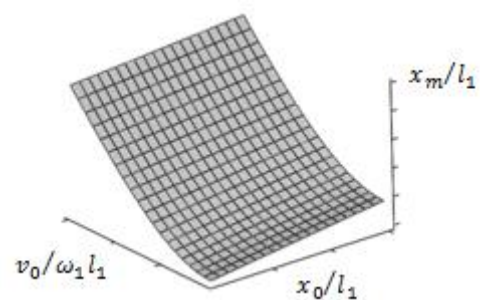


Рис.5. Зависимость максимального смещения от начальной скорости и начального смещения грузика.

Из (5) следует, что функция $x(t)$ периодически осциллирует с периодом T , равным

$$T = \frac{4\sqrt{2}l_2 K(k)}{\sqrt{x_m^2 \omega_2^2 + 2l_2^2 \omega_1^2}}, \quad (7)$$

где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [1]. Период колебаний существенно зависит от длины l_2 недеформированной пружинки, а также от начального смещения x_0 и начальной скорости v_0 . Сравнивая этот период с периодом колебаний простого линейного маятника $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}$, получаем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} K(k) \frac{\omega_2 l_2}{\sqrt{x_m^2 \omega_2^2 + 2l_2^2 \omega_1^2}}. \quad (8)$$

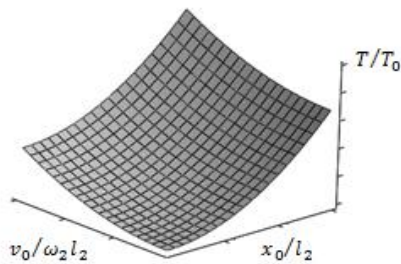


Рис.6. Зависимость периода колебаний от начальной скорости и начального смещения грузика.

Таким образом, закономерности колебаний рассматриваемого осциллятора существенно отличаются от закономерностей простого линейного осциллятора, для которого период колебаний не зависит ни от длины пружинки, ни от начальных условий.

Отметим также, что знаки \pm в аргументе эллиптических функций в (5) указывают на два возможных направления начальной скорости v_0 грузика. Функция $F(\varphi_0, k)$ является нелинейным фазовым сдвигом.

Если снять первую пружинку (полагая формально $k_1 = 0$), то решение (5) приводится к виду

$$x = \frac{x_m}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sn}\left(\pm \frac{x_m}{\sqrt{2}} \frac{\omega_2}{l_2} t + F(\varphi_0, k)\right)}{\operatorname{dn}\left(\pm \frac{x_m}{\sqrt{2}} \frac{\omega_2}{l_2} t + F(\varphi_0, k)\right)}, \quad (9)$$

$$k^2 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\arcsin(\sqrt{2}x_0)}{\sqrt{x_0^2 + x_m^2}},$$

где $x_m^2 = \sqrt{x_0^4 + 2l_2^2 \frac{v_0^2}{\omega_2^2}}$. В этом случае имеют место нелинейные колебания грузика вдоль направляющей с периодом

$$T = \frac{4\sqrt{2}K(k)l_2}{x_m \omega_2}. \quad (10)$$

Если, наоборот, снять вторую пружинку, полагая $k_2 = 0$, то получаем

$$x = x_m \cdot \sin\left(\pm \omega_1 t + \frac{\arcsin x_0}{x_m}\right), \quad (11)$$

где $x_m^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_1^2}$, а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Таким образом, решение (5) имеет предельный переход к решению для линейного маятника, если снять вторую пружинку. В этом случае осциллятор сводится к обычному гармоническому осциллятору (рис.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1963.