Iterpretări și aplicații ale derivatei

Elena Cebotaru, Veronica Ciuhrii

Matematica joacă un rol important în cercetările tehnico-inginerești, umanitare și științifice. Actuale sunt cursurile care permit cercetarea interdependenței științelor studiate, utilizarea reciprocă a conceptelor și metodelor lor. În prezent, în teoria predării, o atenție deosebită este acordată formării profesionale, care permite luarea în considerare a intereselor și abilităților studenților în conformitate cu intențiile lor profesionale.

Explorând lumea înconjurătoare lucrăm cu mărimi fizice, ce se schimbă cu timpul. Acestea se descriu matematic printr-o funcție $f(t)$, unde t semnifică, de obicei, timpul, iar valorile $f(t)$ ale funcției reprezintă măsura mărimii respective, la momentul t. De cele mai multe ori este convenabil să utilizăm ecuația $y=f(t)$, unde y semnifică măsura mărimii respective. Este important adesea să se cunoască "viteza de variație" a unei mărimi, care este o nouă mărime fizică și a cărei măsură este derivata $\frac{df}{dt}$ a funcției f în raport cu timpul t. Așa cum derivata unei funcții este unul dintre conceptele fundamentale ale analizei matematice, profesorului de matematică îi revine misiunea de a familiariza elevul cu această noțiune. Cu toate acestea, în cursul școlar al matematicii, sarcinile cu utilizarea derivatei sunt, în general, abstracte, nu sunt legate de situațiile de inginerie profesională, ceea ce reduce interesul elevilor la soluționarea lor. Profilul fizic și matematic este destinat formării viitorilor ingineri, specialiști în domeniul producției. Prin urmare, această direcție de pregătire a profilului ar trebui să se concentreze asupra dezvoltării trăsăturilor de personalitate ale unui specialist. Problemele aplicate, incluse în manuale, nu rezolvă complet conceptul orientării profesionale a elevilor, însă ei sunt interesați să rezolve cele mai simple probleme de inginerie specifice profesiei alese.

Deoarece matematica este o disciplină fundamentală la facultățile cu profil tehnic, rămâne să învățăm viitorii ingineri să cunoască și alte interpretări ale derivatei, diferite de cele studiate de ei în școală. Acestea vor fi, evident, studiate mai aprofundat în cursul de fizică precum și la disciplinele de profil. Vom enumera câteva din ele:

1. Viteza în mișcarea rectilinie: $v(t)=s'(t),\ s(t)$ – spațiul parcurs.

2. Accelerația în mișcarea rectilinie: $a(t)=v'(t)=s''(t), v(t)$ – viteza.

3. Viteza și accelerația unghiulară: $\omega(t)=\varphi'(t)$, $a(t)=\omega'(t)=\varphi''(t), \varphi(t)$ – unghiul la centru în mișcare circulară.

4. Debitul unui lichid: $Q(t)=v'(t)$, $v(t)$ – cantitatea de lichid care trece printr-o secțiune a tubului în intervalul de timp *t* începând de la un anumit moment de referință.

5. Intensitatea curentului: $i(t)=q'(t), q(t)$ – sarcina electrică.

6. Densitatea unei repartiții de masă: $\rho(l)=m'(l), m(l)$ – masa porțiunii de lungime *l* a barei materiale rectilinii omogene.

7. Puterea $N(t)=A'(t)$, $A(t)$ – lucrul.

8. Capacitatea calorică $C(t)=Q'(t)$, $Q(t)$ – căldura, t – temperatura.

9. Productivitatea muncii $P(t)=v'(t)$, $v(t)$ – volumul de producție.

În scopul formării competenților transdisciplinare și conștienentizării noțiunii de derivată studenților li se pot propune spre rezolvare următoarele probleme (care nu trebuie neapărat să fie prea complicate, dar să reflecte esența lucrurilor studiate):

Problema 1: Un corp este lansat vertical în aer cu viteza inițială de $100(m/s)$. Determinați: a) timpul de ascensiune; b) înălțimea la care ajunge acest corp; c) timpul de cădere; d) viteza cu care atinge solul.

Soluție: a) Se știe că $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t;\ v(t)=s'(t)=-gt+v_0 \quad \Rightarrow v(t)=0$ $\Rightarrow t=10,2s$. b) $s(10,2)\approx 510,204m.$ c) timpul de cădere $t=10,2s.$ d) $s(t)=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$ $v(10,2)\approx 100m/s.$

Problema 2: Trenul părăsește stația și peste *t* ore se află la o distanța $s(t)=\left(t^3+2t^2+3t\right)km$ de la punctul de pornire. Să se determine accelerația $a(t)$ și accelerația după 2 ore.

Soluție: $v=s'(t), v(t)=3t^2+4t+3$, $a(t)=v'(t), a(t)=6t+4$,
$a(2)=6\cdot 2+4=16km/h^2$.

Problema 3: Într-un recipient conținând o soluție de nitrat de argint se introduc doi electrozi legați la bornele unui acumulator. Măsurând în miligrame cantitatea de argint *Q(t)* depusă la catod în *t* secunde, se constată că verifică relația $Q(t)=\ln(1+t)$. Se știe că *Q(t)* este proporțională cu cantitatea de electricitate *q(t)* măsurată în coulombi. Determinați intensitatea curentului electric care trece prin soluție de la timpul $t_1 = 0$ la $t_2 = 2$ (coeficientul de proporționalitate este 1,118). **Soluție:** Se știe că $q(t) = 1{,}118\ln(1+t)$ și că $i(t) = q'(t)$, de unde $i(t) = \frac{1{,}118}{1+t}$. Deci $i(2) = 0{,}373\text{A}$.

Problema 4: O tijă neomogenă *AB* are lungimea de $12cm$. Masa părții *AM* din această tijă este proporțională cu pătratul distanței punctului curent *M* la extremitatea *A* și este de $10g$ pentru $AM = 2cm$. Determinați masa tijei *AB* și densitatea liniară într-un punct oarecare *M*.

Soluție: Avem $\frac{m_1}{m} = \frac{AM^2}{AB^2} \Rightarrow m = 360g$. Din $\frac{m_1}{360} = \frac{AM^2}{12^2} \Rightarrow m_1(l) = 360\frac{(l-0)^2}{144} = \frac{5l^2}{2}g$.

Deoarece $\rho(l) = m'(l) \Rightarrow \rho(l) = m_1'(l) = 5l\ \text{g}/cm^2$.

Problema 5: Roata de volant frânată în *t* (s) se întoarce cu un unghi $\varphi = p - qt + rt^2$, unde *p, q, t* – constante pozitive. Să se determine viteza unghiulară și accelerația unghiulară. Peste cât timp roata se va opri?

Soluție: $\omega = \varphi'(t) = q - 2rt$, $a = \omega' = -2r$. Roata se va opri când $\omega = 0$. Obținem ecuația: $q - 2rt = 0$, $t = \frac{q}{2r}s$.

Problema 6: Capacitatea calorică a apei pentru $t = 100^0C$ este egală cu 1,013. Cantitatea de căldură necesară pentru încălzirea a 1 kg de apă de la 0^0C pană la t^0C se determină după formula: $Q(t) = t + 2\cdot10^{-5}t^2 + 3a\cdot10^{-7}t^3$. Să se găsească valoarea parametrului *a*.

Soluție: $C(t) = Q'(t) = 1 + 4\cdot10^{-5}t + 9a\cdot10^{-7}t^2$. Găsim valoarea parametrului *a* pentru $t = 100^0C$ și $C = 1{,}013$: $1{,}013 = 1 + 4\cdot10^{-5}\cdot100 + 9a\cdot10^{-7}\cdot100^2$; $4\cdot10^{-5}\cdot100 + 9a\cdot10^{-7}\cdot100^2 = 0{,}013$; $4\cdot10^{-3} + 9a\cdot10^{-3} = 0{,}013$; $0{,}009a = 0{,}013 - 0{,}004$; $a = 1$.

Problema 7: Curba cererii este dată de expresia $P = 20 - 0{,}001D - 0{,}01\sqrt{D}$, unde *D* – volumul vânzărilor, *P* – prețul bunurilor în unități convenționale. Volumul vânzărilor este de 10000. Determinați cum ar trebui să se schimbe prețul mărfurilor, astfel încât volumul vânzărilor să crească cu 1%.

Soluție: Determinăm prețul P_0, ce corespunde volumului de vânzări $D = 10000$. $P_0 = 20 - 0{,}001\cdot10000 - 0{,}01\cdot100 = 9u.c.$

Pentru a evalua modificarea prețului mărfurilor, se utilizează formula de calcul aproximativ $P \approx P_0 + P'\Delta D$. Din condiția problemei ΔD reprezintă 1% din 10000 sau 10000/100=100. Determinăm valoarea $P(10000)$:

$$P'(D) = -0,001 - \frac{0,01}{2\sqrt{D}},\ P(10000) = -0,001 - \frac{0,01}{2\cdot 100} = -0,00105.$$

Atunci $P \approx 9 - 0,00105\cdot 100 = 8,895 u.c.$. În așa mod, pentru a mări volumul vânzarilor cu 1%, prețul mărfurilor trebuie să scadă aproximativ cu $0,105 u.c.$.

Probleme pentru lucru independent:

Problema 1: Legea de mișcare a unui mobil este $s(t) = (5t^2 - 2t + 1)m$. Calculați viteza, accelerația la momentul $t = 3s$. **R.:** $v(3) = 28m/s,\ \ a(3) = 10m/s^2.$

Problema 2: Dependența temperaturii *T* a corpului de timpul *t* este definită de relația $T(t) = (0,5t^2 - 2t + 3)grad$. Cu ce viteză se va încălzi acest corp în momentul $t = 3s$? **R.:** $8grad/s.$

Problema 3: Un corp se mișcă rectiliniu conform legii $s(t) = (29 - 6t - 3t^2)m$. Ce drum a parcurs corpul în timpul de la începutul mișcării până la momentul, când viteza de mișcare a lui devine egală cu zero? Cu ce este egală accelerația în acest moment? **R.:** $s(1) = 32m,\ \ a(1) = -610\,m/s^2.$ **Problema 4:** Volantul, încetinit de frână, se întoarce în *t* (s) cu unghiul $\alpha(t) = (3t - 0,01t^2)rad$. Să se găsească viteza unghiulară de rotație a volantului în momentul $t = 7s$ și momentul de timp când volantul se va opri. **R.:** $2,86\,rad/s$; $150s$.

Problema 5. O cărămidă a căzut de pe o casă care are înălțimea de 81*m*. Peste câte secunde ea se va lovi de pământ? Care va fi viteza ei în acest moment? **R.:** $t \approx 4s,\ v \approx 39,8m/s.$

Problema 6. Fie că costul *q* de cofecționare a *x* unități de produs este dat de formula $q(x) = 10000 + 22x + (x^2/12000000)$. Care este costul marginal pentru $x = 120000$? Dacă *q*(*x*) – costul de cofecționare a *x* unități a unui produs, atunci $q'(x)$ – viteza de modificare a costului la modificarea cantității de produs și se numește *cost marginal*. **R.:** 22,02.

Problema 7. Dependența presiunii barometrice *p* de înălțime este descrisă de funcția $\ln(p/p_0) = ch,$ unde p_0 – presiunea normală (la nivelul mării). La înălțimea $D = 5540m$ presiunea atinge jumătate din cea normală. Găsiți viteza de schimbare a presiunii barometrice în dependență de înălțime. **R.:** $\frac{dp}{dh} \approx -0,000125p.$

Problema 8. Cantitatea de electricitate în conductor se schimbă după legea $Q(t) = (2t^2 - 4t)Kl$. Determinați: a) mărimea medie a curentului în primele 2 secunde; b) valoarea curentului la sfârșitul celei de-a doua și la sfârșitul celei de-a cincea secunde.

R.: $a)\ i_{med} = 0$; b) $i(2) = 4a,\ i(5) = 16a.$

Problema 9. Masa m a unei tije neomogene se distribuie după legea $m(l) = (l^2 + 3l + 5)cm$, unde l – lungimea tijei. Găsiți: a) densitatea liniară medie a tijei cu lungimea de $5cm$, calculând de la începutul tijei; b) densitatea liniară a tijei pentru $l = 5cm$ și $l = 10cm$.

R.: $a)\ \rho_{med} = 9g/cm$; b) $\rho(5) = 13g/cm,\ \rho(10) = 23g/cm.$

Problema 10. Dependența cantității de căldură Q primite de către un corp la încălzire de la temperatura t se determină conform legii $Q(t) = (0,24t^2 + e^{0,4t})J$. Găsiți capacitatea calorică C a corpului la $t = 4°C.$ (Capacitatea calorică C reprezintă cantitatea de căldură necesară corpului pentru a-și modifica temperatura cu un grad. Capacitatea calorică caracterizează viteza de variație a temperaturii corpului .) **R.:** $C(4) = (1,92 + 0,4e^{1,6}) = 16,3J/K.$

Atunci când se analizează tema "Derivata și diferențiala funcțiilor elementare", trebuie să acordăm atenție la aceea că mișcarea anumitor obiecte are loc în conformitate cu careva legi descrise de funcții elementare, derivatele cărora sunt formule știute. Astfel, se simplifică studierea proceselor și obiectelor tehnologice, precum și studierea problemelor corespunzătoare de calcul diferențial. Este important să arătăm cum se utilizează noțiunea de derivată pentru a studia diverse fenomene și procesele ale lumii reale.

Familiarizarea studenților cu aplicarea practică a materialelor studiate contribuie la educația interesului față de matematică, iar acesta este unul dintre instrumentele care îi motivează să cunoască mai bine subiectul, dezvoltându-le abilitățile.

În ciuda faptului că matematica este una dintre cele mai abstracte științe, această abstracție nu înseamnă desprinderea conceptelor sale de conceptele lumii reale. Profunzimea ideilor încorporate în anumite concepte matematice ne permite să le găsim aplicații în diverse domenii. Asimilarea completă a teoriei matematice este de neconceput fără aspectul aplicat al conținutului studiat, legătura directă sau indirectă a acestuia cu sfera activității profesionale.

Bibliografie

1. Programele de învățământ la matematică, UTM.
2. Mihailenco V. M. Sbornic pricladnîh zadaci po vîsșei matematiche. Kiev: Vîsșa școla, 1990.
3. Geangălău V. 1001 probleme de analiză matemetică. Chișinău: Universitas, 1993.
4. Bermant G.N. Sbornic zadaci po cursu matematicescogo analiza. Moscva: Nauka, 1971.

Elena Cebotaru, Veronica Ciuhrii
Technical University of Moldova
e-mail: elena.cebotaru@mate.utm.md, veronicaciuhrii@gmail.com