Aspecte metodologice ale predării temei "Geometria analitică în plan"

Elena Cebotaru, Veronica Ciuhrii

În acest articol sunt expuse unele indicații metodice ale pregătirii unui student pentru rezolvarea problemelor aplicative. Acestea ajută la depășirea dificultăților pe care studenții le au în aplicarea cunoștințelor teoretice la rezolvarea problemelor de acest tip.

În ultimul timp s-au schimbat cerințele privind cunoștințele și abilitățile inginerului. El trebuie sa cunoască nu doar specialitatea sa, dar să gândească independent și să fie capabil să implimenteze cunoștințele obținute la rezolvarea problemelor concrete. Toate aceste calități trebuie dezvoltate în cadrul universității la învățarea disciplinelor matematice. Unul dintre mijloacele formării calităților respective reprezintă dezvoltarea deprinderilor studenților de rezolvare a problemelor aplicative. Acestea joacă un rol important în pregătirea unui inginer, stimulând procesul de învățare și interesul pentru aprofundarea studiului matematicii.

Geometria analitică reprezintă un instrument fundamental pentru disciplinele matematice, abstracte sau aplicate. Compartimentul dat al matematicii se regăsește în programa analitică a oricărei universități cu profil tehnic. Conceptele introduse și rezultatele obținute în cadrul acestui curs sunt preluate și utilizate în numeroase discipline tehnice. În problemarele de curs general al matematicii probleme cu caracter aplicativ sunt insuficiente. Acest fapt face ca unii studenți să creadă eronat că matematica este doar o mulțime de formule inutile.

În continuare vom analiza câteva probleme aplicative care sperăm să le spulbere această nedreptate.

Problema 1: Pe o mașină de găurit avem de prelucrat piesa din fig. 1. Să se determine coordonatele carteziene și coordonatele polare ale punctelor *A*, *B*, *C*, *D* în care urmează găurirea.

Indicație: Se vor folosi formulele de trecere de la coordonatele polare la cele carteziene. Evident că punctul *A* are coordonatele $A\left(100;\frac{\pi}{4}\right)$ sau $A\left(50\sqrt{2};50\sqrt{2}\right)$.

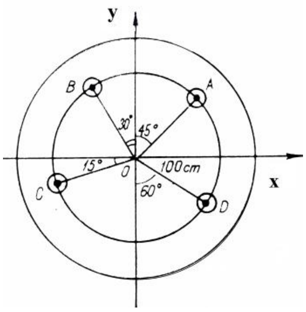

Figura 1

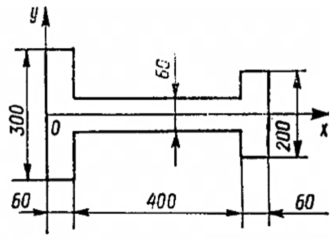

Figura 2

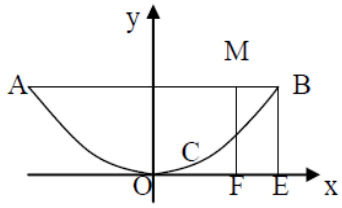

Figura 3

Problema 2: Să se găsească coordonatele centrului de greutate al secțiunii grinzii cu două brațuri, reprezentată în fig. 2 (dimensiunile sunt date în *mm*).

Soluție: Vom alege sistemul de coordonate în așa mod ca axa *Ox* să fie îndreptată după axa de simetrie a secțiunii, iar axa *Oy* – de-a lungul marginii din stânga. În baza simetriei secțiunii față de axa *Ox* avem $y_c = 0$. Vom diviza secțiunea grinzii în trei dreptunghiuri cu ariile 18000mm^2, 24000mm^2 și 12000mm^2. Centrul fiecăruia este pe axa *Ox* în punctele de intersecție ale diagonalelor, adică în punctele cu abscisele 30, 260, 490*mm*. Centrul de greutate comun al primelor două dreptunghiuri se află în punctul x_1, ce împarte segmentul dintre punctele de intersecție ale diagonalelor lor în raportul

$$\lambda = \frac{24000}{18000} = \frac{4}{3}: \quad x_1 = \frac{30 + \frac{4}{3}\cdot 260}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{1130}{7} mm.$$

Centrul de greutate al întregii secțiuni se află în punctul x_c, ce împarte segmentul dintre punctele și centrul de greutate al dreptunghiului al treilea în raportul $\lambda = \frac{12000}{18000 + 24000} = \frac{2}{7}: \quad x_c = \frac{\frac{1130}{7} + \frac{2}{7}\cdot 490}{1 + \frac{2}{7}} = 234,4mm$. Deci, centrul de greutate al secțiunii reprezentată în fig. 2 se află pe axa sa la distanța de 234,4*mm* de la marginea stângă.

Problema 3: Între punctele *A* și *B* trece liniar o autostradă. Pe planul terenului aceste puncte au coordonatele (1;5) și (13;14) (dimensiunile sunt în *km*). Obiectul *C* cu coordonatele (7;7) trebuie de unit prin cel mai scurt drum, în același sistem de coordonate, cu autostrada. Să se găsească pe autostradă punctul de conexiune cu drumul și lungimea drumului.

Soluție: Cel mai scurt drum de la obiectul *C* până la autostradă va trece perpendicular, coborât din punctul *C* pe dreapta *AB*. Ecuația dreptei *AB* are forma

$$3x-4y+17=0. \qquad (1)$$

Din condiția perpendicularității a două drepte, obținem ecuația căutată a perpendicularei *CD*:

$$4x+3y-49=0. \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1) și (2), vom găsi punctul de conexiune al drumului cu autostrada. Acest punct este *D*(5,8;8,6). Lungimea drumului $L=CD=\sqrt{(5{,}8-7)^2+(8{,}6-7)^2}==2km$.

Problema 4: Un cablu de oțel este suspendat de ambele capete. Punctele de fixare sunt situate la aceeași înălțime, distantra dintre ele fiind de 20*m*. Mărimea săgeții de încovoiere, la distanța de 2*m* de la punctul de fixare, orizontal este egală cu 14,4*cm*. Să se determine mărimea încovoierii cablului între punctele de fixare, considerând că forma cablului este o parabolă.

Soluție: Conform fig. 3 avem: $AB=20m$; $EF=2m$; $CM=0{,}144m$, trebuie de găsit $BE=y_0$. Avem că $OE=10m$; $OF=OE-EF=8m$. Atunci punctul *C* are coordonatele: $C(8;y_0-0{,}144)$. Ecuația parabolei o căutam sub forma $y=px^2\ (p>0-const)$. Punctul *C* aparține parabolei, rezultă că $y_0-0{,}144=64p$, $p=\dfrac{y_0-0{,}144}{64}$, deci ecuația parabolei are forma: $y=\dfrac{y_0-0{,}144}{64}x^2$. Punctul *B* are coordonatele $B(10;y_0)$ și pentru $x=10 \Rightarrow y_0=\dfrac{y_0-0{,}144}{64}\cdot 100 \Rightarrow y_0=0{,}4m=40cm$.

Deci $BE=40cm$.

Problema 5: Două localități *A* și *B* sunt situate de-a lungul unei căi ferate liniare. Din localitatea *N*, situată în vecinătatea localității *B*, sarcina poate fi transportată spre localitatea *A* în două moduri: sau pe șosea până în *B*, apoi pe calea ferată până în *A*, sau direct pe șosea până în *A*. Să se determine mulțimea punctelor, pentru care primul mod de transportare este mai convenabil.

Soluție: Vom nota $AB=t$, direcția liniei *AB* coincide cu direcția axei Ox, originea sistemului de coordonate, punctul *O*, va coincide cu mijlocul segmentului *AB*. Atunci $A\left(-\dfrac{t}{2};0\right)$ și $B\left(\dfrac{t}{2};0\right)$. Fie *p* și *q* – respectiv, tarifele transportării pe cale ferată și pe șosea (costul în lei al transportării sarcinii 1tonă per 1km), r (lei) – costul încărcării și descărcării unei tone pe calea ferată. Atunci costul transportării unei tone în primul mod (NB+BA) este

$$s_1 = NB \cdot q + AB \cdot p + r = NB \cdot q + tp + r\,;$$

în al doilea mod (NA): $s_2 = NA \cdot q\,, s_1 - s_2 = (NB - NA)q + tp + q$.

Dacă $s_1 = s_2$, atunci $NA - NB = \dfrac{tp + r}{q}$ – constantă, adică punctul N aparține hiperbolei $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, unde $NA - NB = 2a$, $a = \dfrac{tp + r}{2q}$, $b^2 = c^2 - a^2$, $b^2 = \dfrac{t^2}{4} - a^2$ (punctele A și B reprezintă focarele hiperbolei). Mulțimea căutată de puncte este situată în interiorul ramurii drepte a hiperbolei (ce conține punctul B).

Probleme propuse spre rezolvare:

Problema 1: Centrul de greutate al unei bare omogene este punctul M(5,1). Unul din capete coincide cu punctul A(-1;-3). Determinați coordonatele celui de-al doilea capăt. **R.:** B(11;5).

Problema 2: Determinați coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene dreptunghiulare cu laturile a, b din care este decupat un dreptunghi. Dreptele de decupare trec prin centrul plăcii, axele de coordonate sunt îndreptate de-a lungul laturilor sale (vezi fig. 4). **R.:** $\left(\dfrac{5a}{12};\dfrac{5b}{12}\right)$.

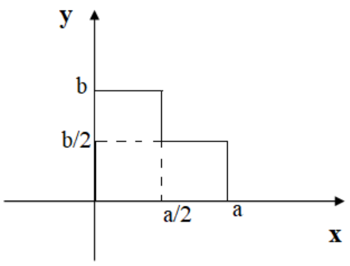

Figura 4

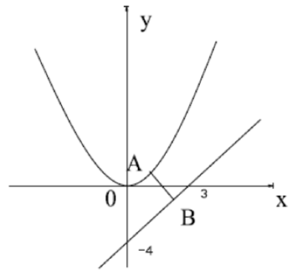

Figura 5

Problema 3: Între punctele A(5;5) și B(8;4) (pe planul cadastral dimensiunile sunt date în m) este trasat liniar un cablu electric. Trebuie de unit la acest cablu punctul C(2;1) prin cel mai scurt mod. Determinați punctul de conexiune și lungimea cablului necesar. **R.:**

Problema 4: Trebuie de unit albiile a două râuri într-un domeniu plan printr-un canal liniar de lungime minimă, dacă aceste albii reprezintă o parabolă $y = \dfrac{2}{3}x^2$ și o dreaptă (vezi fig. 5). **R.:** Optimal va fi canalul ce unește punctele A și B; $A\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$ și $B\left(\dfrac{13}{5};-\dfrac{8}{15}\right)$.

Problema 5: Punctul material *M* se mișcă sub acțiunea căreiva forțe pe circumferința împotriva mișcării acelor ceasornicului. Acțiunea forței se oprește în momentul când poziția punctului este determinată de coordonatele (2;1). Să se scrie ecuației traiectoriei mișcării ulterioare a punctului *M*. **R.:** $3x-4y-2=0$.

În studiul acestei teme ar fi bine de expus și proprietățile focale ale conicelor precum şi aplicaţiile lor în optică, în proiectarea antenelor, în ingineria construcţiilor şi în arhitectură.

Se știe că: o rază de lumină sau semnal ce trece printr-un focar

- al elipsei se reflectă în elipsă, raza reflectată trecând prin celălalt focar;
- al hiperbolei se reflectă în hiperbolă după o dreaptă ce conține celălalt focar.

O rază de lumină sau semnal ce trece prin focarul parabolei se reflectă în parabolă paralel cu axa de simetrie a acesteia.

Aplicații:

Litotripsia este un procedeu medical de a sparge pietrele formate la rinichi care se bazează pe proprietatea focală a elipsei. Pacientul este plasat în focarul unui elipse, deschisă pe jumătate, spre pacient. Din celălalt focar sunt trimise impulsuri acustice, la început mai slabe, apoi mai puternice care au rolul de a pulveriza pietrele.

Principiul de construcţie a galeriei şoaptelor din catedrala Sf. Paul din Londra: dacă o persoană
se opreşte într-un focar al elipsei, ea poate fi auzită numai în celălalt focar, în restul locurilor din galerie nu se aude nimic.

Legile de mișcare ale planetelor în jurul Soarelui au fost stabilite de Johannes Kepler. Planetele se mișcă în jurul soarelui pe traiectorii eliptice, soarele fiind situat într-unul dintre focarele elipselor astfel descrise.

Pentru o suprafaţă lucioasă obţinută prin rotirea unui arc de hiperbolă în jurul axei transversale, razele unei surse luminoase din focar (asociat acelei ramuri) se reflectă împrăştiindu-se, ceea ce conduce la iluminarea unei suprafeţe mari. Asemenea suprafeţe sunt utile în construcţia reflectoarelor care luminează pe arii extinse. Proprietățile focale ale hiperbolei se mai aplică și la construcția radarelor subacvatice.

Sursa punctiformă de lumină (bec) din focarul oglinzii parabolice produce prin reflexie un fascicul de raze paralele care poate penetra întunericul la distanţe mari, în funcție de puterea sursei luminoase. Principiu acesta este util în construcţia reflectoarelor de distanţă, telescopului, proiectorului. Proprietățile oglinzilor parabolice servesc la construcția instalațiilor energetice solare care folosesc efectul termic al radiațiilor solare concentrate în „puncte”.

În prima parte a secolului al XVII-lea Galileo Galilei a ajuns la concluzia că traiectoria corpurilor aruncate oblic este parabolică. Calcule simple și ipoteze fizice simplificatoare confirmă conjectura lui Galilei.

Arcele parabolice sunt adesea folosite în arhitectură și ingineria construcțiilor pentru că asigură echilibrul forțelor și prin urmare construcțiile sunt mult mai stabile.

Natura este scrisă în limbaj matematic. Rămâne să învățăm studentul să-l cunoască și să-l aplice la explorarea lumii înconjurătoare.

Bibliografie

1. Programele de învățământ la matematică, UTM.
2. Mihailenco V. M. Sbornic pricladnîh zadaci po vîsșei matematiche. Kiev: Vîsșa școla, 1990.
3. Cletenic D.V. Sbornic zadaci po analiticescoi gheometrii. Moscva: Nauka, 1986.
4. Baranencov A.I. Sbornic zadaci i uprajnenii po matematiceskomu analizu. Moscva: Nauka, 2006.

Elena Cebotaru, Veronica Ciuhrii
Technical University of Moldova
e-mail: elena.cebotaru@mate.utm.md, veronicaciuhrii@gmail.com