Rezolvarea ecuaţiilor prin metoda iterativă

Alina Țurcanu, Rita Domentean

De obicei, ecuațiile care apar în practică, au coeficienții obținuți prin anumite măsurări. Cel mai des acești coeficienți nu pot fi calculați exact, ci în mod aproximativ. La rândul său, rădăcinile acestor ecuații sunt calculate cu o anumită precizie, comparativ egală cu precizia de calcul a coeficienților ecuației. Astfel apare necesitatea de a rezolva unele ecuații în mod aproximativ. Sunt cunoscute foarte multe metode de rezolvare aproximativă a ecuațiilor și sistemelor de ecuații, cum ar fi: Metoda bisecţiei (înjumătăţirii intervalului), Metoda falsei poziţii (metoda coardei, metoda secantei, metoda împărţirii intervalului în părţi proporţionale), Metode de tip Newton, Metoda Jacobi, Metoda Gauss-Seidel, Metoda suprarelaxării, Metoda lui Richardson, Metoda gradientului conjugat, etc.

Vom indica o *metodă iterativă* de rezolvare a ecuațiilor neliniare.

Având o careva ecuație neliniară de tipul $f(x) = g(x)$, ea uşor poate fi transformată într-o ecuație de tipul $\varphi(x) = x$ în felul următor: $\varphi(x) = x + f(x) - g(x)$.

Metoda iterativă permite rezolvarea ecuaţiilor neliniare pornind de la o aproximaţie iniţială a soluţiei, a unui şir de numere care converg (sau nu) către soluţia ecuației. În acest scop se construiește un șir de numere x_n , pentru care se calculează $\varphi(x_n)$ și $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1,2, \ldots$. Amplasând aceste șiruri în sistemul cartezian de coordonate, se determină uşor, în mod aproximativ soluția ecuației $\varphi(x) = x$.

Nu toate ecuaţiile neliniare pot fi rezolvate prin această metodă ci numai acelea care îndeplinesc condiţia necesară de convergenţă: $\left|\varphi'(x)\right| < 1$.

Într-adevăr: se poate arata că între erorile de aproximare în doua iterații succesive e_n și e_{n+1} exista relația:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) \cdot \varphi'(x^*) = e_n \cdot \varphi'(x^*)$$

care permite stabilirea unei forme primare a condiției de convergență. Astfel, pentru ca șirul aproximațiilor succesive să fie convergent, eroarea de aproximare trebuie sa scadă între doua iterații consecutive, adică $|e_{n+1}| < |e_n|$, ceea ce conduce la $\left|\varphi'(x^*)\right| < 1$. Aceasta reprezintă o condiție necesara, dar nu și suficientă pentru asigurarea convergenței. O valoare subunitară în modul a derivatei $\varphi'(x^*)$ garantează existența unui interval (α, β), în vecinătatea soluției exacte x^*, în care poate fi aleasă aproximația inițială x_0, astfel încât, procesul iterativ sa fie convergent. De fapt, o condiție de forma $|\varphi'(x)| < 1$trebuie satisfăcută în întregul interval (α, β). Chiar dacă condiția $|\varphi'(x^*)| < 1$ este satisfacută, dar aproximația inițială este aleasă departe de soluția exacta x^*, structura funcției $\varphi(x)$ poate conduce la un proces divergent.

Convergența procesului iterativ este guvernată de o teoremă de *punct fix* care, în principiu, impune următoarele condiții: pentru un interval (α, β), oricât de larg, alegerea unei aproximații inițiale x_0 în interiorul acestuia, care să asigure convergența, este arbitrară dacă și numai dacă funcția $\varphi(x)$ este o aplicație strict contractantă pe acel interval.

În matematică, teorema de punct fix a lui Banach, cunoscută și sub denumirea de principiul contracțiilor, este un instrument important în teoria spațiilor metrice; ea garantează existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor de forma $\varphi(x) = x$, pentru o clasă largă de aplicații φ și furnizează, totodată, o metodă constructivă de determinare a acestor soluții. Teorema a fost demonstrată în 1922, de fondatorul analizei funcționale, Stefan Banach (1892-1945) și reprezintă o abstractizare a metodei *aproximațiilor succesive*, metodă utilizată în mod empiric încă din antichitate pentru rezolvarea ecuațiilor numerice, și, în cazul ecuațiilor diferențiale, introdusă de Joseph Liouville în 1837 și dezvoltată sistematic de Emile Picard, începând cu anul 1890.

Definiția 1. Se numește spațiu metric (X, d)*, o mulțime* $X \neq \emptyset$*, înzestrată cu metrica* d*, adică cu o funcție* $d: X \times X \to R$*, care satisface următoarele axiome:*

1. *Pentru* $\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ d(x, y) \geq 0$ *și* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. *Pentru* $\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Pentru* $\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ \forall z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definiția 1. *Fie* (X, d) *un spațiu metric. O aplicație* $T: X \to X$ *se numește contracție pe X, dacă există* $q \in [0,1)$ *astfel încât oricare ar fi* $x, y \in X$

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq q d(x, y).$$

Definiția 2. *Fie* $T: X \to X$*. Punctul* $x^* \in X$ *se numește punct fix al lui* T*, dacă* $T(x) = x$.

Definiția 3. *Șirul* $\{x_n\}$ *din X se numește șir fundamental sau șir Cauchy, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0,\ \exists k = k(\varepsilon) \in$ *N, astfel încât, pentru* $\forall n, m > k,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definiția 4. *Un spațiu metric se numește complet (Freshe), dacă orice șir fundamental are limită în acest spațiu.*

Teorema *(Banach). Fie (X, d) un spațiu metric complet și $T: X \to X$ o contracție. Atunci T admite un punct fix unic $x^* \in X$ (i.e. $T(x^*) = x^*$). Mai mult, x^* poate fi determinat prin metoda aproximațiilor succesive: se pornește de la un element arbitrar* $x_0 \in X$ și se definește șirul $x_{n+1} = T(x_n)$, care converge la x^*: $x_n \to x^*$.

Observație. *Inegalitățile următoare sunt echivalente și descriu viteza de convergență:*

$$d(x^*, x_n) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

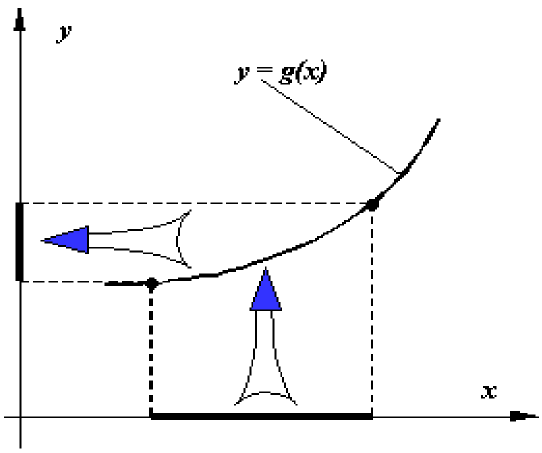
$$d(x^*, x_{n+1}) \le \frac{q}{1-q} d(x_{n+1}, x_n)$$

$$d(x^*, x_{n+1}) \le q d(x^*, x_n).$$

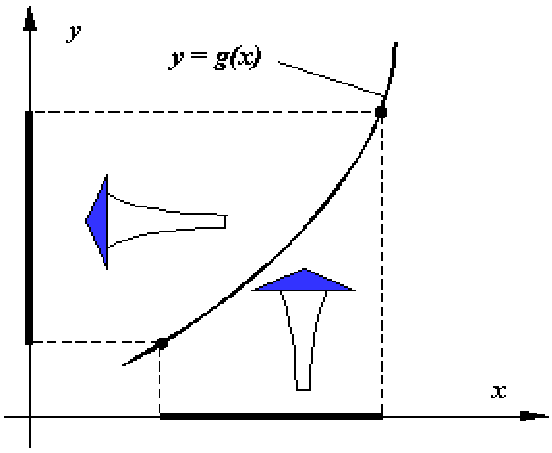
Interpretarea geometrică a noțiunii de "aplicație strict contractantă"

a) Funcția g(x) este o aplicație strict contractantă pe un anumit interval dacă proiecția acestui interval pe axa Oy, prin curba y = g(x) se contracta.

b) In caz contrar, când proiecția intervalului respectiv pe axa Oy, prin curba y = g(x) se dilata, g(x) nu mai este o aplicație strict contractanta.



(a)



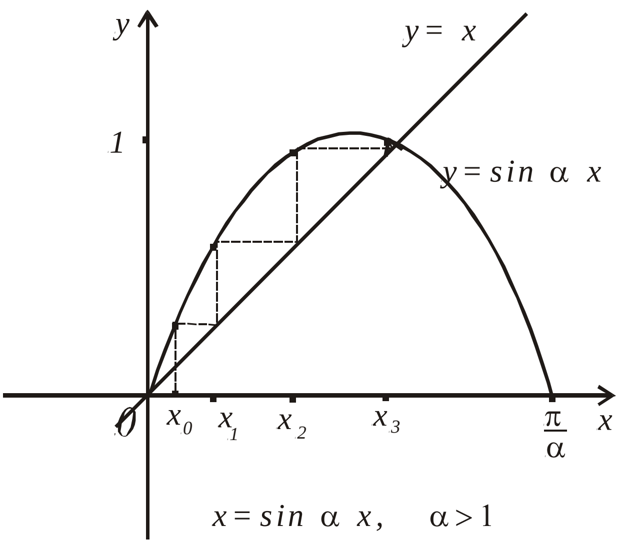
(b)

Evoluțiile unor procese iterative convergente sau divergente sunt ilustrate în exemplele de mai jos. In funcție de semnul derivatei φ′ în vecinătatea soluției x^*, convergenta poate fi monotona (cazurile a) si b)), pentru $\varphi'(x^*) > 0$, sau oscilanta (cazurile c) si d)), pentru $\varphi'(x^*) < 0$. De asemenea, în cazurile e), f) și g) sunt prezentate trei procese divergente oscilante. Cazul h), în care $|\varphi'(x)| = 1$ este deosebit de sensibil deoarece, în funcție de forma curbei $y=\varphi(x)$, se poate obține atât convergența ($x_0 < x^*$), cât și divergența ($x_0 > x^*$),) șirului aproximațiilor succesive. Ultima situație este un exemplu de divergență monotonă.

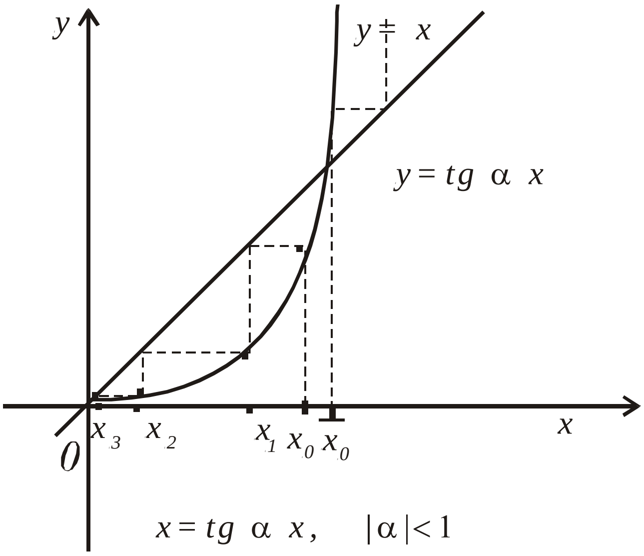
1. Exemple de convergență monotonă.

a) $x = \sin \propto x, \propto > 1.$ b) $x = \text{tg} \propto x,\ |\propto| > 1.$

Prin metoda b) se poate de determinat doar soluția $x_1^* = 0$, pentru $x_0 < x^*$. Pentru $x_0 > x^*$, metoda diverge. A doua soluție x_2^* nu poate fi găsită prin metoda iterativă.



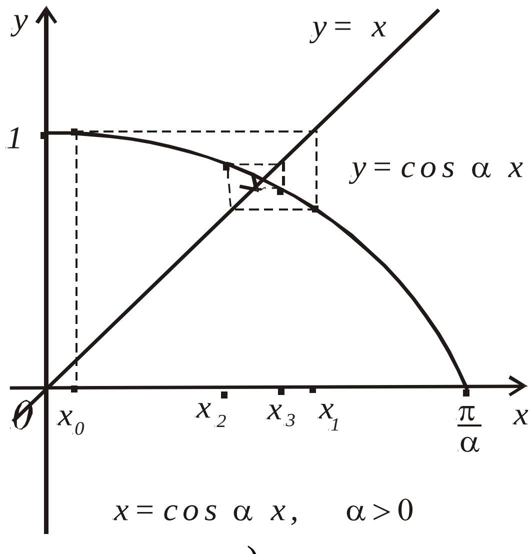
a)



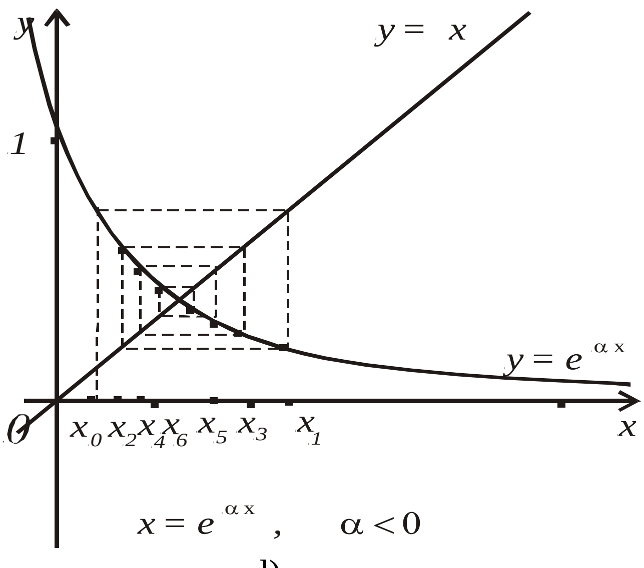
b)

2. Exemple de convergență oscilantă

c) $x = \cos \propto x, \propto > 0.$ *d*) $x = e^{\propto x}, \quad \propto < 0$



c)

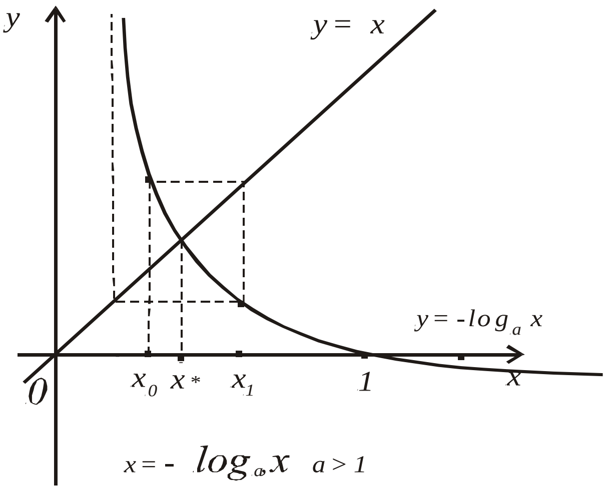


d)

3. Exemple de divergență

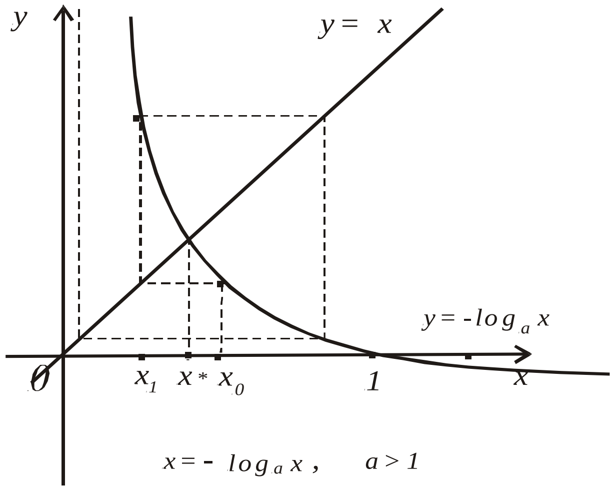
e) $x = -log_a x, a > 1.$ *f)* $x = -log_a x, a > 1.$

$x_0 < x^*$



e)

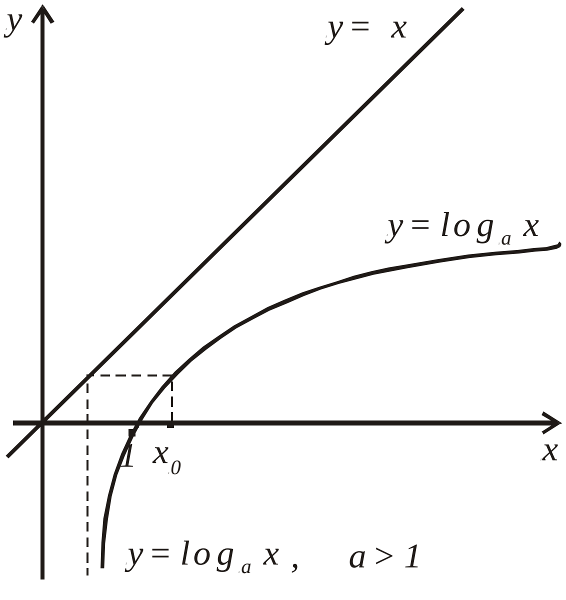
$x_0 > x^*$



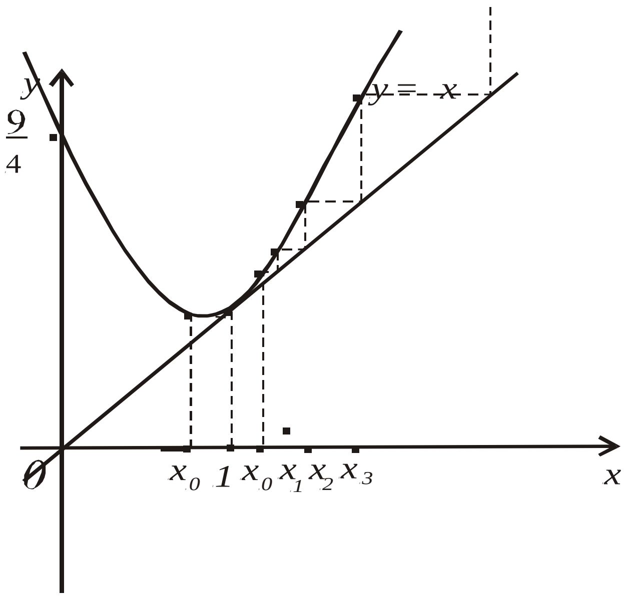
f)

g) $x = log_a x, a > 1.$ *h)* $x = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 3x + \frac{9}{4}$.

Pentru metoda h) avem cazul $|\varphi'(x^*)| = 1$. Ecuația $x = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 3x + \frac{9}{4}$ are soluția dublă $x^* = 1$. $\min \varphi(x) = \min(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 3x + \frac{9}{4}) \approx 0{,}817$



g)



h)

Verificarea condițiilor teoremei de punct fix este însa o sarcină mult prea neproductivă din punctul de vedere al timpului de calcul și al complexității calculelor pentru a fi și practică. Se preferă verificarea, cel mult, a unei condiții de forma $|\varphi'(x^*)| < 1$ și localizarea stricta a soluției , iar cel mai frecvent se impune un număr maxim de iterații la epuizarea cărora procesul iterativ este întrerupt forțat.

4. Algoritmul de calcul

1. Având pusă în față ecuația $f(x) = g(x)$, definim aproximația inițială x_0, a preciziei ε și a numărului maxim de iterații N_{max} .
2. Construim funcția $\varphi(x) = x + f(x) - g(x)$.
3. Procesul iterativ:
   - inițializarea procesului iterativ: x_0;
   - daca s-a atins precizia dorita $|\varphi(x) - x| < \varepsilon$ sau la numărul maxim de iterații N_{max} se întrerupe bucla iterativă și se trece la pasul 4;
   - se trece la o noua iterație: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2, ...$;
   - calculul noii aproximații: x_{n+1};
   - se revine la pasul 3.2.
4. Stabilirea condițiilor de ieșire din bucla iterativa:
   - Daca $|\varphi(x) - x| < \varepsilon$ - proces convergent - soluția aproximativa este x.
   - Daca $|\varphi(x) - x| > \varepsilon$ și N_{max} de iterații este depășit, procesul este divergent.

Concluzii

1. Metodele iterative sunt mai potrivite decât metodele directe pentru rezolvarea unor ecuații, rezolvarea cărora este imposibilă sau anevoioasă prin metode directe.

2. Alegerea valorii inițiale influențează asupra convergenței sau divergenței procesului iterativ. În cazul unui proces iterativ convergent, valoarea inițială afectează doar numărul de iterații necesar pentru atingerea unei erori impuse.

Bibliografie

1. Agratini O, Chiorean I., Coman G., Trîmbițaș R. Analiză numerică și teoria aproximării, vol. III. Presa Universitară Clujeană, 2002.
2. Ciuprina G. Algoritmi numerici pentru calcule științifice în ingineria electrică. Ed. MatrixROM, 2013, pag. 88-106.
3. Trîmbițaș R. Teorema de punct fix a lui Banach. Principiul contracției, 2015, http://math.ubbcluj.ro.

Alina Țurcanu, Rita Domentean
Universitatea Tehnică a Moldovei
e-mail: turcan.alina@civis.md, ritaturcanu@yahoo.com.