DETERMINAREA PARAMETRULUI SCHEMEI DE INTERACȚIUNE DINTRE SUBELEMENTE ALE MEDIULUI MICRONEOMOGEN

N. Sveatenco, dr.fiz.mat.
Universitatea Tehnică a Moldovei

INTRODUCERE

Influența structurii materialului, din punct de vedere mecanic, se reduce la amorsarea fluctuațiilor neregulate ale stărilor de tensiune şi de deformație la scară microscopică. Prin urmare, un rol deosebit de important la descrierea comportării neelastice a agregatului policristalin joacă metoda trecerii de la starea microscopică la starea macroscopică. Metoda analizată în lucrare consideră concomitent neomogenitățile câmpurilor microtensiunilor şi deformațiilor, precum şi nu contrazice principiilor termodinamicii şi mecanicii mediilor continue deformabile.

1. ECUAȚIILE FIZICE LOCALE ALE MODELULUI STRUCTURAL

Elementul considerat al solidului deformabil în starea inițială la scară macroscopică $(V \geq V_0)$ este statistic omogen şi izotrop, iar în interiorul conglomeratului $(V < V_0)$ se observă o distribuție neomogenă a câmpurilor de tensiuni şi deformații.

Cea mai importantă, la descrierea comportării neelastice a conglomeratului policristalin, este estimarea influenței dezvoltării neomogenității deformațiilor ireversibile în interiorul volumului V_0 asupra relației macroscopice dintre tensiuni şi deformații.

Pentru a descrie comportarea agregatului policristalin se aplică procedura de construire a modelului structural conform căreia cea mai mică unitate a structurii este un subelement ce se identifică cu mulțimea tuturor micropunctelor materiale în interiorul conglomeratului V_0 care au acelaşi tensor al deformațiilor ireversibile

$$\bar{p}_{ij} = \tilde{p}_{ij}\,, \tag{1}$$

$$\bar{p}_{ij} = \left\langle \tilde{p}_{ij} \right\rangle_{\bar{V}}\,, \tag{2}$$

unde $\tilde{p}_{ij}$ sunt deformațiile ireversibile în micropuncte ale elementului de structură, iar prin $\bar{p}_{ij}$ se subînțeleg deformațiile ireversibile medii în subelementul de volum $\bar{V}$.

Micropunctul material conține un număr suficient de mare de atomii întrucât concepția mediului continuu rămâne valabilă şi la scară microscopică.

Componența particulelor materiale în subelement rămâne neschimbată în toate procesele de deformare a conglomeratului. Particulele aceluiaşi subelement pot avea diferite orientări şi situații în spațiul conglomeratului. Deoarece granulele agregatului policristalin se deformează neuniform, conform definiției acceptate masa şi volumul unui singur subelement pot fi mărimi oricât de mici. Este evident, că pornind de la selecția particulelor materiale după tensorul deformațiilor ireversibile, celelalte mărimi termomecanice variază de la o particulă materială la altă în subelementul dat. Proprietățile elastice ale subelementelor şi ale elementului corpului se presupun identice.

Astfel, un macroelement al corpului policristalin de volum V_0 mărginit de suprafața S_0, se consideră compus dintr-un număr finit sau infinit de subelemente, legate cinematic între ele şi cu diferite proprietăți termoreologice.

Tensorul tensiune al unui subelement constituie media tensorilor tensiune în particulele materiale, care provoacă aceleaşi deformații ireversibile.

La descrierea proceselor ireversibile tensorile tensiunilor $\bar{t}_{ij}$ şi deformațiilor $\bar{d}_{ij}$ se descompun în deviatori $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ şi tensori sferici $\bar{\sigma}_0\delta_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_0\delta_{ij}$:

$$\bar{t}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_0\delta_{ij}\,, \qquad \bar{d}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_0\delta_{ij}\,, \tag{3}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{3}\bar{t}_{nn}\,, \qquad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}\bar{d}_{nn}\,, \tag{4}$$

$$\bar{t}_{ij} = \left\langle \tilde{t}_{ij} \right\rangle_{\bar{V}}\,, \quad \bar{d}_{ij} = \left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle_{\bar{V}}\,. \tag{5}$$

În cadrul modelului examinat se stabileşte interconexiunea locală dintre deformații reversibile $\bar{e}_{ij}$ şi ireversibile $\bar{p}_{ij}$, prin urmare, deviatorul deformaţiilor subelementului $\bar{\varepsilon}_{ij}$ se reprezintă ca suma componentelor respective:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij} . \qquad (6)$$

Proprietăţile tensoriale ale subelementelor în stare "liberă" se definesc, presupusă fiind posibilitatea descompunerii componentelor deviatorului deformaţiilor elastice $\bar{e}_{ij}$ după tangenta şi după secanta la traiectoria deformării ireversibile

$$\bar{e}_{ij} = \bar{\tau}\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} + \bar{r}\frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}}, \qquad d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij}d\bar{p}_{ij}} . \qquad (7)$$

Funcţionalul $\bar{\tau}$ se precizează în baza legii creşterii centrale a deformaţiilor ireversibile a lui V.Marina [2]: proprietăţile scalare ale subelementelor pot fi prezentate sub formă de sumă a proprietăţilor termovâscoplastice în stare stabilă $\bar{\tau}(\bar{\gamma},\bar{\upsilon})$ şi celor care provin din modificarea structurii în procesele ireversibile

$$\bar{\tau}(\bar{\gamma},\bar{\upsilon},\bar{s}) = \bar{\tau}(\bar{\gamma},\bar{\upsilon}) + \bar{s} . \qquad (8)$$

Astfel, funcţionalul $\bar{\tau}$ depinde de parametrii de stare: viteza deformării ireversibile $\bar{\gamma} = \dot{\bar{\lambda}}$, variaţia neelastică a volumului $\bar{\upsilon}$ şi starea structurii $\bar{s}$.

Ecuaţia evolutivă pentru parametrul de stare $\bar{s}$ ce caracterizează ecruisarea izotropă se admite sub forma

$$\dot{\bar{s}} = \begin{cases} a\sqrt{\dot{\bar{p}}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}}, & \bar{s} < \bar{x}(\bar{\gamma},\bar{\upsilon}), \\ \dot{\bar{x}}, & \bar{s} = \bar{x}(\bar{\gamma},\bar{\upsilon}). \end{cases} \qquad (9)$$

La începutul procesului de deformare ireversibilă $\bar{s}\big|_{t=0} = s_0$, unde s_0 depinde de tipul tratamentului termic al materialului. Dacă la începutul procesului de deformare ireversibilă materialul se află în stare structural stabilă, atunci $s_0 = 0$.

Relaţia dintre ecruisarea cinematică $\bar{r}$ şi parametrii de stare se exprimă în felul următor

$$\bar{r} = \begin{cases} a_0\bar{p}, & \bar{r} < \bar{x}_0(\bar{\gamma},\bar{\upsilon}), \\ \bar{x}_0(\bar{\gamma},\bar{\upsilon}), & \bar{r} = \bar{x}_0(\gamma,\upsilon). \end{cases} \qquad (10)$$

Ca parametrul de stare ce identifică mărimile $\bar{\tau}$ şi $\bar{r}$ cu subelementul anumit se alege ponderea subelementelor deformate ireversibil $\psi\ (0 \le \psi \le 1)$ care reflectă succesiunea de trecere a subelementelor din starea reversibilă în cea ireversibilă la solicitarea iniţială.

Starea termomecanică a subelementului în conglomerat depinde nu numai de valorile proprii ale parametrilor fizici, ci şi de starea altor subelemente. De aceea proprietăţile subelementului în conglomerat se deosebesc de proprietăţile subelementului în stare liberă. Pentru a reflecta cantitativ această variaţie a proprietăţilor în lucrarea [2] se admite că toate modurile de interacţiune dintre subelemente în conglomerat se formează numai sub influenţa legăturilor medii, adică particulele materiale în conglomerat nu se pot deforma de sine stătător, ci numai într-un mod coordonat. În urma autoconcordanţei proceselor de deformare ireversibilă răspunsul subelementelor în conglomerat se reflectă printr-o substituire a parametrilor de stare locali în ecuaţia fizică a subelementelor cu valorile medii din toată mulţimea:

$$\gamma = \frac{1}{\psi_\lambda}\int_0^1 \dot{\bar{\lambda}}(\psi')d\psi', \qquad \dot{\bar{\lambda}} = \sqrt{\dot{\bar{p}}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}} , \qquad (11)$$

$$\upsilon = \frac{1}{\psi_\upsilon}\int_0^1 \bar{\upsilon}(\psi')d\psi' , \qquad \dot{s} = \frac{1}{\psi_s}\int_0^1 \dot{\bar{s}}(\psi')d\psi' , \qquad (12)$$

$$0 \le \psi_\lambda, \psi_\upsilon, \psi_s \le 1 , \qquad (13)$$

γ – viteza medie a deformării ireversibile în submulţimea de subelemente, care se află dincolo de limita de elasticitate; υ – variaţia neelastică de volum; ψ – parametrul distinctiv al subelementelor, care la solicitarea iniţială coincide cu ponderea subelementelor deformate ireversibil în momentul depăşirii de acest subelement a limitei de elasticitate; ψ_λ, ψ_υ, ψ_s – ponderile sumare ale subelementelor, în care parametrii corespunzători $\dot{\bar{\lambda}}$, $\bar{\upsilon}$, $\dot{\bar{s}}$ sunt diferiţi de zero.

Fenomenul de autoconcordanţă a proceselor de deformare ireversibile ale subelementelor în cadrul principiului legăturilor medii poate fi reprezentat în modul de două ecuaţii [2, 6]:

– condiţie de curgere în subelementul supus modificărilor structurale în conglomerat

$$\bar{e}_{ij}\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} = \tau(\psi,\gamma,\upsilon) + s + \bar{r}\cos\bar{\alpha} , \qquad (14)$$

$$\cos\bar{\alpha} = \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}}\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} ; \qquad (15)$$

– lege despre orientarea generală a proceselor de curgere ireversibilă în subelemente

$$\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{p}} = \frac{dp_{ij}}{dp} , \qquad (16)$$

$$d\overline{p} = d\sqrt{\overline{p}_{ij}\overline{p}_{ij}}\,, \qquad dp = d\sqrt{p_{ij}p_{ij}}\,, \tag{17}$$

unde τ poate fi identificat cu limita de curgere inițială a subelementului; $\overline{\alpha}$ este unghiul dintre tangenta la traiectoria deformației ireversibile și vectorul deformației ireversibile.

Condiția de curgere (14) nu conține noțiunea de suprafață de curgere. Deoarece la nivel de macrostructură noțiunea de suprafață de curgere, obținută prin medierea unui număr infinit de suprafețe ale subelementelor, își pierde sensul geometric; aceste suprafețe în procesul de deformație se intersectează și relațiile între macrotensiuni și deformații nu pot fi construite în cadrul calcului diferențial. În baza concepții de curgere (14) se asigură trecerea continuă de la starea reversibilă la starea ireversibilă.

Proprietățile tensoriale ale subelementelor în conglomerat se descriu prin legea (16) care stabilește traiectoriile admisibile ale deformării ireversibile ale subelementelor în conglomerat.

La solicitarea monotonă în toată submulțimea de subelemente deformate ireversibil se produce un proces activ de solicitare, ce corespunde monotoniei a evoluției ponderii subelementelor deformate ireversibil în procesul considerat. Aceasta înseamnă că față de ψ se formează numai o singură frontieră de delimitare între subelementele deformate reversibil și ireversibil, deci în (11) $\psi_{\lambda} = \psi'$. Având în vedere legea (16) și faptul că $d\overline{p}$ în toate subelemente are unul și același semn obținem diferențialul lungimii arcului de traiectorie a deformațiilor ireversibile $d\overline{\lambda}$

$$d\overline{\lambda} = \sqrt{d\overline{p}_{ij}d\overline{p}_{ij}} = \sqrt{\frac{d\overline{p}}{dp}dp_{ij}\frac{d\overline{p}}{dp}dp_{ij}} = \frac{d\overline{p}}{dp}d\lambda\,. \tag{18}$$

Legea traiectoriilor admisibile (16) poate fi reprezentată luând în considerare (18) sub forma

$$\frac{d\overline{p}_{ij}}{d\overline{\lambda}} = \frac{dp_{ij}}{d\lambda}\,. \tag{19}$$

În acest caz (15) ținând cont de (18)

$$\cos\overline{\alpha} = \frac{\overline{p}_{ij}}{\overline{p}}\frac{d\overline{p}_{ij}}{d\overline{\lambda}} = \frac{d\overline{p}}{d\overline{\lambda}} = \frac{dp}{d\lambda} = \frac{p_{ij}}{p}\frac{dp_{ij}}{d\lambda} = \cos\alpha\,, \tag{20}$$

Integrând (18) după submulțimea de subelemente deformate ireversibil $0 \le \psi \le \psi'$ (altă parte din subelemente $\psi > \psi'$ continuă să se afle în stare reversibilă), obținem

$$d\lambda = \int_0^{\psi'} d\overline{\lambda}\,d\psi\,, \qquad d\overline{p}\big|_{\psi>\psi'} = 0\,. \tag{21}$$

Astfel în conglomerat sunt admisibile numai traiectoriile deformațiilor ireversibile, pentru care unghiurile dintre vectorii deformațiilor ireversibile ale subelementelor și tangentele la traiectoriile deformațiilor lor ireversibile $\overline{\alpha}$ pentru toate subelementele sunt identice și egale cu unghiul corespunzător α al traiectoriei elementului corpului, iar lungimea arcului traiectoriei deformațiilor ireversibile ale elementului corpului λ coincide cu lungimea medie luată după subelemnte.

Pentru parametrul de stare γ, reieșind din (11) și ținând cont de (21) obținem expresia

$$\gamma = \frac{\dot{\lambda}}{\psi'}\,. \tag{22}$$

2. PRINCIPIILE TRECERII DE LA STAREA MICRO LA CEA MACRO ÎN PROCESE DE DEFORMARE IREVERSIBILE

Trecerea de la tensiunile și deformațiile microscopice $\widetilde{t}_{ij}$, $\widetilde{d}_{ij}$ (în fiecare micropunct) la tensiunile și deformațiile la scară macroscopică t_{ij}, d_{ij} se efectuează în baza ecuațiilor de echilibru și a relațiilor geometrice, care se satisface în fiecare micropunct în interiorul domeniului V_0

$$\widetilde{t}_{ij,j} + b_i = 0\,, \qquad \widetilde{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{u}_{i,j} + \widetilde{u}_{j,i}\right), \tag{23}$$

și condițiilor de omogenitate a tensiunilor și a deformațiilor pe suprafața conglomeratului S_0

$$\widetilde{u}_i\big|_{S_0} = u_i = d_{ij}x_j\,, \qquad d_{ij} = const\,, \tag{24}$$

$$f_i^{(n)}\Big|_{S_0} = t_{ij}n_j = \widetilde{t}_{ij}n_j\Big|_{S_0}\,, \qquad t_{ij} = const\,, \tag{25}$$

unde $\mathbf{f}(S_0)$ este forța de suprafață, $\mathbf{u}(S_0)$ sunt deplasările pe suprafața conglomeratului S_0.

În baza ecuațiilor de echilibru și a relațiilor geometrice (23) se stabilește interconexiunea dintre mărimile microscopice luate în medie și analoagele lor macroscopice, care figurează în condițiile la limită (24), (25):

$$\left\langle \widetilde{t}_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \widetilde{t}_{ij}dV\,, \qquad t_{ij} = \left\langle \widetilde{t}_{ij} \right\rangle_{V_0}\,, \tag{26}$$

$$\left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \tilde{d}_{ij} dV , \qquad d_{ij} = \left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle_{V_0} . \qquad (27)$$

În baza legii întâi a termodinamicii şi expresiilor (23) - (25) se poate deduce relaţia

$$t_{ij} d_{ij} = \left\langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} dV , \qquad (28)$$

care sub forma

$$\left\langle \tilde{t}_{ij} \right\rangle \left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle = \left\langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \right\rangle . \qquad (29)$$

poartă numele de teorema lui Hill [1].

Pentru a obţine un sistem de ecuaţii închis, în baza căruia s-ar putea deduce ecuaţiile constitutive la nivel macroscopic în baza ecuaţiilor fizice locale, trebuie la ecuaţiile clasice ale mecanicii mediului deformabil şi termodinamicii (23) - (28) să adauge principii suplimentare noi formulate de V.Marina [2-4]: principiul fluctuaţiei tensiunilor şi deformaţiilor, precum şi principiul de discordanţă a măsurilor macroscopice cu analogiile lor microscopice potrivite.

În baza principiului fluctuaţiei tensiunilor şi deformaţiilor, care satisface ecuaţiile de echilibru şi relaţiile geometrice ale mediului deformabile, precum şi legile termodinamicii, se stabileşte schema interacţiunii cinematice dintre subelemente în conglomerat.

Interacţiunile dintre două subelemente se formează prin intermediul interacţiunilor dintre particulele, care aparţin diferitelor subelemente. Prin urmare, interacţiunile dintre subelemente au un caracter nelocal. Este evident că nu toate detaliile interacţiunilor dintre particule influenţează asupra comportării materialului la scară macroscopică.

Câmpurile aleatoare ale tensiunilor şi deformaţiilor vom reprezenta sub forma de sumă a aşteptărilor matematice şi fluctuaţiilor:

$$\bar{t}_{ij} = t_{ij} + \Delta \bar{t}_{ij} , \quad \bar{d}_{ij} = d_{ij} + \Delta \bar{d}_{ij} , \qquad (30)$$

unde conform (26) - (28)

$$\left\langle \Delta \bar{t}_{ij} \right\rangle = 0 , \quad \left\langle \Delta \bar{d}_{ij} \right\rangle = 0 , \qquad (31)$$

$$\left\langle \Delta \bar{t}_{ij} \Delta \bar{d}_{ij} \right\rangle = 0 . \qquad (32)$$

Conform principiului general de interacţiune cinematică dintre subelemente în conglomerat se admite că fluctuaţiile tensiunilor sunt funcţii univoce ale fluctuaţiilor deformaţiilor [4]. Acest principiu nu este în contradicţie cu (32) şi se presupune valabil atât pentru procesele de deformare reversibile cât şi pentru cele ireversibile. Într-o aproximaţie liniară avem:

$$\Delta \bar{t}_{ij} = A_{ijnm} \Delta \bar{d}_{nm} , \qquad (33)$$

unde pentru materialele izotrope la scară macroscopică tensorul de ordinul al patrulea A_{ijnm} se consideră izotrop:

$$A_{ijnm} = B_0 \delta_{ij} \delta_{nm} - B I_{ijnm} , \qquad (34)$$

$$I_{ijnm} = \frac{1}{2} \left(\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn} \right) . \qquad (35)$$

În baza principiului fluctuaţiei tensiunilor şi deformaţiilor (33)-(35), legii întâi a termodinamicii sau teoremei lui Hill (28)-(29), precum şi legii de variaţie elastică a volumului, în lucrările [4, 6, 7] a fost obţinută schema generală de interacţiune cinematică dintre subelemente:

$$\Delta \bar{t}_{ij} = -B \Delta \bar{d}_{ij} + \alpha \sqrt{\frac{B(B+K)}{3} \Delta \bar{d}_{nm} \Delta \bar{d}_{nm}} \; \delta_{ij} , \quad (36)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & dac\breve{a} \quad \bar{d}_{nm} \bar{d}_{nm} > d_{pq} d_{pq} \\ -1, & dac\breve{a} \quad \bar{d}_{nm} \bar{d}_{nm} \le d_{pq} d_{pq} \end{cases} ,$$

unde K este modulul de compresibilitate volumică; iar parametrul interior B reflectă concomitent neomogenitatea decurgerii proceselor de deformare şi solicitare subelementelor în conglomerat.

În consecinţă a descompunerii fluctuaţiilor tensiunilor şi deformaţiilor în componente deviatoare şi sferice

$$\Delta \bar{t}_{ij} = \Delta \bar{\sigma}_{ij} + \Delta \bar{\sigma}_0 \delta_{ij} , \quad \Delta \bar{d}_{ij} = \Delta \bar{\varepsilon}_{ij} + \Delta \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij} . \quad (37)$$

au fost obţinute două grupe de ecuaţii

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = -B \Delta \bar{\varepsilon}_{ij} , \qquad (38)$$

$$\Delta \bar{\sigma}_0 = \alpha \sqrt{\frac{BK}{3} \Delta \bar{\varepsilon}_{nm} \Delta \bar{\varepsilon}_{nm}} , \qquad (39)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & dac\breve{a} \quad \bar{\varepsilon}_{nm} \bar{\varepsilon}_{nm} > \varepsilon_{pq} \varepsilon_{pq} \\ -1, & dac\breve{a} \quad \bar{\varepsilon}_{nm} \bar{\varepsilon}_{nm} \le \varepsilon_{pq} \varepsilon_{pq} \end{cases} .$$

Ţinând cont de faptul că constantele de elasticitate ale subelementelor sunt identice, deformaţiile reversibile se determină conform relaţiilor următoare:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{2G} , \quad e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} . \qquad (40)$$

Pentru a stabili legătura locală dintre deformaţiile reversibile şi ireversibile să reprezentăm în (38) deviatorii deformaţiilor sub formă (6), şi având în vedere (40), obţinem:

$$\bar{e}_{ij} - e_{ij} = m\left(p_{ij} - \bar{p}_{ij}\right), \quad m = \frac{B}{B+2G}. \quad (41)$$

Prin urmare, graţie valorilor limită diferite ale componentelor deviatorilor deformaţiilor elastice ale subelementelor apare distribuţia neuniformă a deformaţiilor ireversibile în sistemul de subelemente.

Parametrul interior necunoscut m ce figurează în ecuaţiile fluctuaţiilor deformaţiilor reversibile şi ireversibile se precizează în baza principiului discordanţei măsurilor formulat de V.Marina [3-4].

Esenţa principiului constă în următoarele. Din (26)-(29) rezultă că mediile pe volum ale tensiunilor, deformaţiilor şi ale produsului lor depind în mod univoc de datele de pe suprafaţa S_0. Însă nu toate mărimile termomecanice se bucură de această proprietate. Un şir de mărimi termomecanice depinde nu numai de datele de pe suprafaţa conglomeratului, ci şi de structura ei. Un interes deosebit prezintă diferenţele de tipul

$$\Delta = \left\langle \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle, \quad (42)$$

$$\Delta_0 = \left\langle \bar{\sigma}_0\bar{\varepsilon}_0 \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_0 \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_0 \right\rangle \quad (43)$$

numite discordanţe; $\langle \bullet \rangle$ este semnul de a lua media pe volumul V_0 al conglomeratului.

Conform teoremei lui Hill (29) şi având în vedere (3) obţinem că

$$\left\langle \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle = -3\left(\left\langle \bar{\sigma}_0\bar{\varepsilon}_0 \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_0 \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_0 \right\rangle\right). \quad (44)$$

Discordanţa depinde de schema cinematică a interacţiunii subelementelor în conglomerat. Modelele lui Voigt (1928) [8] sau Reuss (1929) [5] la stabilirea legităţilor de deformare a conglomeratului utilizează ipotezele despre egalitatea deformaţiilor

$$\bar{d}_{ij} = \left\langle \bar{d}_{ij} \right\rangle \quad (45)$$

sau a tensiunilor

$$\bar{t}_{ij} = \left\langle \bar{t}_{ij} \right\rangle \quad (46)$$

ale tuturor subelementelor conglomeratului.

Deoarece în aceste două cazuri limită discordanţe Δ şi Δ_0 se anulează, deci întotdeauna există o oarecare schemă intermediară de interacţiune dintre subelemente, ce ia în considerare concomitent neuniformităţi de distribuţie şi a tensiunilor şi a deformaţiilor, şi pentru care Δ şi Δ_0 obţin valori extreme.

Discordanţa dintre măsura macroscopică şi analogul microscopic potrivit al acesteia este purtătoare de informaţie despre un şir de elemente de structură a agregatului policristalin. Modalitatea de descifrare a acestei informaţii stabilită în lucrarea [4] apelează la principiul: în toate interacţiunile reale în conglomerat discordanţele ating valori extreme

$$\left\langle \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle = Extr, \quad (47)$$

$$\left\langle \bar{\sigma}_0\bar{\varepsilon}_0 \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_0 \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_0 \right\rangle = Extr. \quad (48)$$

Din (44) concluzionăm că pentru toate interacţiuni admisibile, dacă discordanţa (47) obţine valoare minimă, cealaltă (48) –maximă.

Menţionăm că principiile extremului discordanţelor mărimilor microscopice medii şi respectiv ale analogilor lor macroscopici potriviţi nu pot fi obţinute din principiile termodinamicii sau ale mecanicii clasice. Ele au un caracter informaţional şi se numesc principii informaţionale. În etapa actuală, este recunoscut faptul că interacţiunea informaţională este prezentă în lumea materială alături de celelalte forme de interacţiuni. Sub o formă cantitativă (47)-(48), principiile informaţionale lărgesc sistemul de ecuaţii care stabileşte relaţii între stările la scară microscopică şi starea macroscopică.

3. PARAMETRUL INTERIOR AL SCHEMEI DE INTERACŢIUNE CINEMATICĂ DINTRE SUBELEMENTE

În baza principiului discordanţei măsurilor determinăm parametrul interior B, ce reflectă concomitent neomogenitatea decurgerii proceselor de deformare şi solicitare subelementelor în conglomerat, prin parametrul necunoscut m, care figurează în ecuaţiile fluctuaţiilor deformaţiilor reversibile şi ireversibile.

Exprimăm discordanţa Δ prin componentele deviatoare ale tensorilor deformaţiilor reversibile şi ireversibile utilizând relaţiile (40), (6) şi (41):

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\left[e_{ij} + m\left(p_{ij} - \bar{p}_{ij}\right)\right], \quad (49)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = e_{ij} + mp_{ij} + (1-m)\bar{p}_{ij}, \quad (50)$$

$$\Delta = 2Gm(1-m)\left[\left\langle \bar{p}_{ij} \right\rangle \left\langle \bar{p}_{ij} \right\rangle - \left\langle \bar{p}_{ij}\bar{p}_{ij} \right\rangle\right] \quad (51)$$

sau având în vedere (20)

$$\Delta = 2Gm(1-m)\left[\left\langle \bar{p} \right\rangle \left\langle \bar{p} \right\rangle - \left\langle \overline{pp} \right\rangle\right]\cos^2\alpha. \quad (52)$$

Legea deformării ireversibile a subelementului în conglomerat (14), luând în seamă (19) şi (20), se reprezintă sub forma

$$\bar{e}_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}=\tau(\psi,\gamma,\upsilon)+s+\bar{r}\cos\alpha\,. \qquad (53)$$

Înmulțim expresia (41) cu $dp_{ij}/d\lambda$, luând în considerare (19), (20)

$$\bar{e}_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}-e_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}=m(p-\bar{p})\cos\alpha\,. \qquad (54)$$

Pentru un grup de sublemente, care se află în stare de curgere ireversibile cu $\psi\le\psi'$, să examinăm (54) ținând cont de (53)

$$\tau(\psi,\gamma,\upsilon)+s+\bar{r}\cos\alpha-e_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}=m(p-\bar{p})\cos\alpha\,. \quad (55)$$

În subelementul la frontieră ce delimitează domeniul reversibil de cel ireversibil, $\psi=\psi'$, $\bar{p}=0$ şi conform (10) $\bar{r}=0$, atunci din (55) obținem:

$$\tau(\psi',\gamma,\upsilon)+s-e_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}=mp\cos\alpha\,. \qquad (56)$$

Deformațiile ireversibile în subelmente cu $\psi\le\psi'$ calculăm scăzând (55) din (56):

$$\bar{p}=\frac{\tau(\psi',\gamma,v)-\tau(\psi,\gamma,v)}{(a_0+m)\cos\alpha}\,. \qquad (57)$$

Dacă prin $\bar{p}'$, p' se va nota deformațiile ireversibile la solicitarea inițială proporțională în momentul depăşirii limitelor de elasticitate a aceluiaşi număr de subelemente ca şi la solicitarea compusă, atunci conform (57) stabilim următoarea interconexiune dintre mărimile $\bar{p}$, p şi $\bar{p}'$, p':

$$\bar{p}(\psi)=\frac{\bar{p}'(\psi)}{\cos\alpha}, \qquad p=\frac{p'}{\cos\alpha}\,. \qquad (58)$$

Prin urmare, deformațiile ireversibile în subelemente şi în elementul corpului în momentul depăşirii limitelor de elasticitate a aceluiaşi număr de subelemente este de $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ ori mai mare la solicitarea compusă decât la cea proporțională.

În baza relațiilor (57), (58) problema determinării discordanței (52) la solicitarea compusă se reduce la concretizarea mărimii Δ la solicitarea proporțională:

$$\Delta=2Gm(1-m)\left[(p')^2-\left\langle(\bar{p}')^2\right\rangle\right]. \qquad (59)$$

Diferențiem mărimea Δ după timp:

$$\dot{\Delta}=4Gm(1-m)\left[p'\dot{p}'-\left\langle\bar{p}'\dot{\bar{p}}'\right\rangle\right]. \qquad (60)$$

La solicitarea proporțională legea deformării ireversibile (14) se reprezintă în felul următor:

$$\bar{e}'=\sqrt{\bar{e}'_{ij}\bar{e}'_{ij}}=\tau(\psi,\gamma,\upsilon)+s+\bar{r}\,. \qquad (61)$$

Diferențiind (61) pentru valori constante ale parametrilor de stare γ şi υ, obținem

$$\dot{\bar{e}}'=a\dot{p}'+a_0\dot{\bar{p}}'\,. \qquad (62)$$

Legătura locală dintre deformațiile reversibile şi ireversibile (41) la solicitarea proporțională se stabileşte sub forma:

$$\dot{\bar{e}}'-\dot{e}'=m\left(\dot{p}'-\dot{\bar{p}}'\right). \qquad (63)$$

Substituind (62) în (63), obținem:

$$\dot{\bar{p}}'=\frac{\dot{e}'+(m-a)\dot{p}'}{a_0+m}\,. \qquad (64)$$

Reprezentăm diferențialul mărimii Δ (60) utilizând (64) sub forma

$$\dot{\Delta}=\frac{4Gm(1-m)}{a_0+m}p'\left[(a+a_0)\dot{p}'-\dot{e}'\right], \qquad (65)$$

şi apoi ținând cont de (40) la solicitare proporțională

$$e'=\frac{\sigma'}{2G} \quad \text{sau} \quad \dot{e}'=\frac{\dot{\sigma}'}{2G}, \qquad (66)$$

integrăm după timp

$$\Delta=\frac{2m(1-m)}{a_0+m}\left[G(a_0+a)(p')^2-A_{Dp'}\right], \quad (67)$$

unde $A_{Dp'}=\int_0^{\sigma'}p'd\sigma'$ este lucrul mecanic suplimentar al deformațiilor ireversibile.

Diferențiem relația (67) după parametrul m

$$\frac{\partial\Delta}{\partial m}=2\frac{(1-2m)(m+a_0)-(m-m^2)}{(a_0+m)^2}\left[G(a_0+a)(p')^2-A_{Dp'}\right]. \quad (68)$$

Din condiția extremului discordanței Δ obținem că parametrul m, care caracterizează schema cinematică de interacțiune dintre subelemente, depinde numai de coeficientul de ecruisare lineară a_0:

$$m=-a_0+\sqrt{a_0+a_0{}^2}\,. \qquad (69)$$

Interconexiunea dintre parametrii interiori B şi m determinăm în baza relaţiei (41):

$$B = 2G\frac{m}{1-m}. \quad (70)$$

CONCLUZII

Trecerea de la starea microscopică la starea macroscopică nu pot fi efectuată numai în baza principiilor clasice ale termomecanicii. Sunt necesare următoarele principii suplimentare [2-4].

Principiul fluctuaţiei tensiunilor şi deformaţiilor stabileşte aşa o schemă de interacţiune cinematică dintre elemente de structură, în cadrul căreia ar fi posibil a lua în considerare concomitent neomogenitatea decurgerii proceselor de deformare şi solicitare a subelementelor în conglomerat.

Principiul legăturilor medii precum şi principiul de discordanţă a măsurilor macroscopice cu analogiile lor microscopice potrivite reflectă fenomenul autoconcordanţei proceselor de deformare ireversibilă a subelementelor în conglomerat. Aceste două principii au un caracter informaţional şi nu pot fi obţinute din principiile termodinamicii sau ale mecanicii clasice.

Principiile suplimentare lărgesc sistemul de ecuaţii care stabileşte relaţii între stările micro şi macro.

Condiţia de curgere [2, 6] în modelul structural examinat asigură trecerea continuă de la starea reversibilă la starea ireversibilă, pentru că nu conţine noţiunea de suprafaţă de curgere şi de aceea toate dificultăţile asociate cu acest concept dispar automat.

Bibliografie

*1. **Hill R**. On macroscopic measures of plastic work and deformation in microheterogeneous media.// Journal of Mathematical Physics, ISSN 0022-2488, pag.214, 1975.*

*2. **Marina V**. Mnogoelementnaya model' sredy, opisyvayushhaya peremennye slojnye neizotermicheskie protzessy nagruzhenia. //Avtoreferat dis. doc.fiz.-mat. Institut mehaniki AN Ucrainy, Kiev, pag.3-31, 1991.*

*3. **Marina V**. The influence of the microheterogeneity on the metallic materials behavior during irreversible processes.// Metallurgy and New Researches, vol. II, Nr.3, ISSN 1221-5503, pag.50-61, 1994.*

*4. **Marina V**. The structural model of the polycrystalline aggregate in the reversible and irreversible processes.// Metallurgy and New Researches, vol. IV, Nr.4, ISSN 1221-5503, pag.37-51, 1996.*

*5. **Reuss A**. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen of grund der plastizitätsbedingung fur einkristalle.// Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin, vol.9, Nr.4, ISSN 0044-2267, pag.49-64, 1929.*

*6. **Sveatenco N**. Analiza comportării modelului mediului structural în procese de solicitare monotone compuse şi neizoterme.//Autoreferatul tezei de doc. fiz.-mat., Universitatea Tehnică a Moldovei, Chişinău, pag.3-22, 2002.*

*7. **Sveatenco N**. Principiile interacţiunii cinematice dintre elemente de structură ale mediului microneomogen.// Meridian Ingineresc Nr.1, Chişinău, pag.35-39, 2013.*

*8. **Voigt W**. Lehrbuch der Kristallphysik.// Stutgart: Teubner Verlaggeselschaft, pag. 962, 1928.*

Recomandat spre publicare: 30.05.2013.