Secţia V. CIBERNETICĂ ŞI INFORMATICĂ ECONOMICĂ

DOMENIUL DE DEFINIŢIE AL DISPRRPORŢIONALITĂŢII SOLUŢIEI OPTIME ÎN SISTEME RP

Prof. univ. dr. hab. Ion Bolun, ASEM
bolun@ase.md

Electoral systems with proportional representation, when using each of 12 indices of disproportionality/proportionality, including Rae, Loosemore-Handby, Grofman, Lijphart, Gallagher, Sainte-Laguë, d'Hondt and Mean relative deviation ones, are investigated. The definition domains for the optimal solution's disproportionality, when using each of the 12 indices, are determined and comparatively analyzed.

Key words: *electoral systems, voting rules, indice of proportional reprezentation, optimal solution, disproportionality.*

1. Introducere

Caracterul în întregi al numărului de decidenţi şi, de asemenea, al numărului de opţiuni în sistemele de luare a deciziilor multiopţionale prin votare cu reprezentare proporţională (RP) conduce, deseori, la disproporţionalitatea reprezentării voinţei decidenţilor în decizie [1-3]. Disproporţionalitatea în cauză depinde şi de regula „voturi-decizie" (VD) aplicată. Există mai multe asemenea reguli, folosite în diverse situaţii sau chiar în situaţii similare. De exemplu, în alegeri parlamentare se folosesc aşa reguli VD ca [4]: metoda d'Hondt (Belgia, Israel, Olanda, Peru, Polonia, Portugalia, România, Spania), metoda Sainte-Laguë (Danemarca, Norvegia, Noua Zelandă, Suedia), metoda Hamilton – celui mai mare rest cu cota Hare (Costa Rica, Islanda, Republica Korea, Lituania, Rusia, Slovenia, Taiwan, Ucraina), metoda Huntington-Hill (SUA). Deci alegerea regulii VD oportune în sisteme RP nu este o problemă trivială.

De rând cu alţi factori, care ar putea influenţa alegerea regulii VD pentru un caz concret de luarea deciziilor prin votare RP, este şi cel privind domeniul de definiţie al disprporţionalităţii soluţiei optime. Acest domeniu depinde de indicele de apreciere a disproporţionalităţii şi, de asmenea, de regula VD folosită. Fiecare regulă VD minimizează disproporţionalitatea în cauză în sensul unui anumit criteriu de optimizare [5]. Nu s-a ajuns încă la un indice de apreciere a disproporţionalităţii universal acceptat.

În lucrare se determină şi se cercetează comparativ domeniul de definiţie al disprporţionalităţii soluţiei optime pentru 12 indici de apreciere a disproporţionalităţii: Rae, Loosemore-Handby, Rose, Grofman, Lijphart, Gallagher, Abaterii pătratice, Sainte-Laguë, d'Hondt, Abaterii standard relative, Abaterii relative medii şi cel Divizor general.

2. Indici de apreciere a disproporţionalităţii/proporţionalităţii în sisteme RP

Cele mai cunoscute practici privind folosirea sistemelor de votare sunt, probabil, cele ce ţin de scrutinele electorale. De aceea, în continuare, aspectele abordate privind asemenea sisteme se vor cerceta, fără a diminua din universalitate, prin prisma scrutinelor electorale cu reprezentare proporţională de liste de partid (coaliţii, blocuri). Fie:

M – numărul total de mandate în organul electiv;

n – numărul de partide care au atins sau depăşit pragul electoral;

V – numărul total de voturi exprimate valabil pentru cele n partide;

V_i – numărul de voturi exprimate în favoarea partidului i, $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V$;

x_i – numărul de mandate ce se alocă partidului i, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M$; $x_i \geq 1$, $i = \overline{1, n}$.

Reprezentarea proporţională presupune reprezentarea egală a drepturilor alegătorilor în organul electiv şi are loc (de exemplu, [1]), dacă au loc egalităţile

$$m_i = v_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

unde v_i = $100 \cdot V_i/V$ este procentul voturilor acumulate de partidul i, iar m_i = $100 \cdot x_i/M$ – procentul mandatelor distribuite partidului i. Dar din cauza caracterului în întregi al mărimilor V_i şi x_i, respectarea egalităților (1), la distribuirea celor M mandate între n partide, de obicei, nu se reuşeşte. Astfel, în sisteme reale, distribuirea mandatelor între partide poate fi cu abateri de la reprezentarea proporțională. Ca indici de apreciere a abaterii în cauză se folosesc aşa indici de disproporționalitate/proporționalitate ca [1-3, 5]: Rae (I_{Rae}), Loosemore-Handby (I_{L-H}), Rose (I_R), Grofman (I_{Gr}), Lijphart (I_L), Gallagher (I_{Ga}), Abaterii pătratice (I_{SD}), Sainte-Laguë (I_{S-L}), d'Hondt (I_H), Abaterii relative medii (I_d), Abaterii standard relative (I_σ) ş.a. După cum este observat în [5], între aceşti indici au loc relațiile:

$$I_{L-H} = I_{Rae} \cdot n/2 = I_{Gr} \cdot N/2 = 100 - I_R = I_d/2, \text{ unde } N = 10^4 \Big/ \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \tag{2}$$

$$I_{Ga} = I_{SD} / \sqrt{2}, \tag{3}$$

$$I_\sigma = 10\sqrt{I_{S-L}}. \tag{4}$$

Relațiile (2)-(4) facilitează considerabil cercetarea particularităților folosirii celor unsprezece indici nominalizați. Cunoscând numărul n de partide, numărul V_i, $i = \overline{1,n}$ de voturi şi unul din indicii I_{L-H}, I_{Rae}, I_{Gr}, I_R şi I_d, se pot calcula, conform relațiilor (2), ceilalți patru indici. În mod similar, cunoscând unul din indicii I_{Ga} şi I_{SD}, se poate calcula celălalt din egalitatea (3) şi cunoscând unul din indicii I_{S-L} şi I_σ, se poate calcula celălalt din relația (4). Astfel, pentru a determina domeniul de definiție al soluției optime la aplicarea acestor 11 indici este suficient de cercetat cinci din ei – pentru ceilalți, domeniul în cauză poate fi determinat în baza relațiilor (2)-(4). Din cei enumerați se vor cerceta indicii: I_L, I_{Ga}, I_{S-L}, I_H şi I_d. Se va cerceta, de asemenea, şi indicele I_c al Regulii cu divizor general, propuse în [8]. Esența acestor indici este următoarea.

Indicele Lijphart [2] constituie devierea absolută maximă dintre m_i şi v_i

$$I_L = \max_{i=\overline{1,n}} |\, v_i - m_i \,|. \tag{5}$$

Indicele Gallagher [3] se determină ca

$$I_{Ga} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2}. \tag{6}$$

Indicele Sainte-Laguë [3] se determină ca

$$I_{S-L} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i}(v_i - m_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i (1 - \frac{m_i}{v_i})^2. \tag{7}$$

Indicele D'Hondt [3, 5] reprezintă raportul minim dintre v_i şi m_i

$$I_H = 100 \min_{i=\overline{1,n}} \frac{v_i}{m_i}, \tag{8}$$

dar care pentru a fi reprezentat în procente este înmulțit, în acest caz, cu 100%.

Indicele abaterii relative [6] este egal cu abaterea relativă medie a reprezentării în organul electiv a drepturilor $d_i = x_i/V_i$, $i = \overline{1,n}$ ale alegătorilor de la valoarea medie $d = M/V$ şi se determină ca

$$I_d = \frac{\Delta d}{d}100 = \sum_{i=1}^{n}\left|v_i - m_i\right|, \text{unde } \Delta d = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} V_i \left|d_i - d\right|. \tag{9}$$

Aici $\Delta d_i = |d_i - d|$ reprezintă abaterea (eroarea) absolută a reprezentării în cele x_i mandate a valorii d a drepturilor fiecărui alegător ce a votat pentru partidul i. Abaterea relativă $100 \cdot \Delta d/d$, măsurată în procente a Δd față de d, este echivalentă, după cum se poate observa din (9), cu procentul mandatelor prin care distribuirea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ diferă de distribuirea care ar asigura reprezentarea egală în organul electiv a drepturilor, de valoare d, ale alegătorilor. Între mărimea d şi cota standard $Q = V/M$, denumită şi cotă Hare, are loc relația $d = 1/Q$.

Regula VD cu **Divizor general**, propusă în [8], constă în

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{V_i}{cu_i + 1} > \frac{V_k}{cu_k + 1}, \tag{10}$$

unde $i \succ k$ semnifică preferinţa partidului i faţă de cel k privind alocarea următorului mandat, $u_j \geq 0$ este numărul de mandate deja alocate partidului j, iar $c > 0$ este o constantă, fie şi fracţionară. După analogie cu indicele d'Hondt, se poate uşor constata că această regulă foloseşte în calitate de indice de proporţionalitate indicele

$$I_c = 100d \min_{i=\overline{1,n}} \frac{V_i}{cy_i + 1}, \%, \tag{11}$$

unde, deoarece $u_j \geq 0$, are loc $y_i = \max\{x_i - 1; 0\}$.

Caz particular al indicelui Divizor general (11) la $c = 1$ este cel d'Hondt (8). De menţionat că la $c = 2$ indicele (11) se transformă în indicele

$$I_{pS-L} = 100d \min_{i=\overline{1,n}} \frac{V_i}{2y_i + 1}, \%, \tag{12}$$

care poate fi folosit ca indice de proporţionalitate la aplicarea metodei Sainte-Laguë.

De menţionat că cei 12 indici nominalizaţi pot fi grupaţi în două categorii: 1) indici de disproporţionalitate, care caracterizează disproporţionalitatea distribuirii mandatelor – valoarea acestora creşte odată cu creşterea disproporţionalităţii (Rae, Loosemore-Handby, Grofman, Lijphart, Gallagher, Abaterii pătratice, Sainte-Laguë, Abaterii standard relative şi Abaterii relative medii); 2) indici de proporţionalitate, care caracterizează proporţionalitatea distribuirii mandatelor – valoarea acestora creşte odată cu micşorarea disproporţionalităţii (Rose, d'Hondt şi cel al Regulii cu divizor general, inclusiv I_{pS-L}).

3. Domeniul de definiţie al valorilor indicilor

Valoarea minimală pentru toţi cei 9 indici de disproporţionalitate enumeraţi în p.2 este zero, se obţine dacă au loc egalităţile (1) şi corespunde reprezentării proporţionale. Din contra, valoarea celor trei indici de proporţionalitate enumeraţi în p.2 este, în aceste condiţii, maximală şi este egală cu 100 %, iar cea minimală este 0 şi corespunde proporţionalităţii minime (disproporţionalităţii de 100%). Pentru indicele Divizor general, de exemplu, valoarea de 100% se obţine, ţinând cont că $x_i \geq 1$ ($i = \overline{1,n}$), la $V_i = Qa_i$, $i = \overline{1,n}$ şi $\max\{I_c\} = \max\left\{100d \min_{i=\overline{1,n}} \frac{V_i}{c(a_i - 1) + 1}\right\} = 100d \frac{V_k}{c(a_k - 1) + 1}$, $a_k = 1$.

Se poate uşor constata, de asemenea, că valoarea maximală, dacă pragul de reprezentare pentru fiecare partid este 0, constituie pentru indicii: Rae – $200/n$ (%), Loosemore-Handby – 100 %, Grofman – 200 %, Lijphart – 100 %, Gallagher – 100 %, Abaterii pătratice – $100\sqrt{2}$, Sainte-Laguë – ∞, Abaterii standard relative – ∞ şi Abaterii relative medii – 200%. De exemplu, conform (7), limita de sus pentru indicele I_{S-L}, egală cu ∞, se obţine la $m_i \neq 0$ şi $v_i = 0$.

4. Soluţii optime şi domeniul de definiţie al acestora

Cel mai favorabil, din punctul de vedere al minimizării disproporţionalităţii, este cazul distribuirii proporţionale a mandatelor, adică atunci când au loc egalităţile (1). Pentru acest caz, cei şase indici cercetaţi obţin valorile:

$$\widehat{I}_H^* = \widehat{I}_c^* = 100\%; \quad \breve{I}_L^* = \breve{I}_{Ga}^* = \breve{I}_{S-L}^* = \breve{I}_d^* = 0\%, \tag{13}$$

care coincid cu valorile respective pentru aceşti indici, date în p. 3; aici $\breve{I}^*$ este valoarea limită de jos, iar $\widehat{I}^*$ – valoarea limită de sus a indicelui I^* pentru soluţiile optime respective.

De menţionat, totodată, că limita de sus mai mare de 100%, pentru cinci din indicii de disproporţionalitate (Grofman – 200%, Abaterii pătratice – $100\sqrt{2}$, Sainte-Laguë – ∞, Abaterii standard relative – ∞ şi Abaterii relative medii – 200%), specificată în p.3, în cazul folosirii acestora în probleme de minimizare a disproporţionalităţii, este puţin informativă. De exemplu, nu poate fi considerat real scrutinul, în care se vor distribui mandate vreunui partid care nu a acumulat nici un vot. De aceea, limita de sus reală pentru indicii Sainte-Laguë şi Abaterii standard relative, de exemplu, este mai mică decât ∞. Prezintă interes limita reală a indicilor cercetaţi (cea de sus – pentru indicii de disproporţionalitate şi cea de jos – pentru indicii de proporţionalitate) la folosirea metodelor respective de minimizare a disproporţionalităţii distribuirii mandatelor, adică pentru soluţiile optime.

Limita de sus $\widehat{I}_d^*$ a disproporționalității pentru soluția optimă I_d^*, în sensul **Abaterii relative medii** (9), se determină ca [6]

$$\widehat{I}_d^* = \max I_d^* = \frac{50}{M}\begin{cases} n, & \text{la } n \text{ par} \\ n - \frac{1}{n}, & \text{la } n \text{ impar} \end{cases}, \ \% \text{ mandate.} \tag{14}$$

Deoarece $M \geq n \geq 2$ şi ținând cont de (14), are loc relația

$$\widehat{I}_d^* = 50 \ \% \text{ mandate.} \tag{15}$$

Luând în considerare relațiile (2), limita de sus a disproporționalității pentru soluția optimă, în sensul fiecăruia din **indicii Loosemore-Handby, Rae** şi **Abaterii relative medii** şi cea de jos – pentru indicele **Rose**, se obține conform (15) şi relației respective din următoarele

$$\widehat{I}_{L-H}^* = \widehat{I}_{Rae}^* \cdot n/2 = 100 - \breve{I}_R^* = \widehat{I}_d^*/2, \tag{16}$$

adică, ținând cont că $\breve{n} = 2$,

$$\widehat{I}_{L-H}^* = 25\%; \widehat{I}_{Rae}^* = 25\%; \breve{I}_R^* = 75\% \text{ mandate.} \tag{17}$$

În ceea ce priveşte **indicele Grofman**, limita în cauză nu poate fi obținută în baza relațiilor (2) şi (15), deoarece numărul de partide efective N folosit în (2) depinde de mărimile $v_i = V_i/V,\ i = \overline{1,n}$. După cum se poate uşor demonstra, valoarea minimă a lui N este 1 şi se obține la $V_j = V$ şi $V_i = 0$, $i = \overline{1,n} \setminus j$, iar valoarea maximă a lui N este n şi se obține la $V_j = \text{const} = V/n$, $i = \overline{1,n}$, care asigură şi valoarea maximă a expresiei $\sum_{i=1}^{n} |v_i - m_i|$ din (9). Astfel, în aceste cazuri marginale, din punctul de vedere al varierii mărimilor V_i, $i = \overline{1,n}$, indicele Grofman coincide: la lipsa varierii acestor mărimi ($V_j = \text{const} = V/n$, $i = \overline{1,n}$) – cu indicele Rae şi la varierea maximă a lor ($V_j = V$ şi $V_i = 0$, $i = \overline{1,n} \setminus j$) – cu indicele Abaterii relative medii (9). Deci, $\widehat{I}_{Gr}^* = \widehat{I}_d^* = 50\%$ mandate.

Valoarea maximă $\widehat{I}_{Ga}^*$ a **indicelui Gallagher** I_{Ga}^* pentru soluția optimă se determină ca [7]

$$\widehat{I}_{Ga}^*(M,n) = \frac{25\sqrt{2}}{M\sqrt{n}}\begin{cases} n, & \text{la } n \text{ par} \\ \sqrt{n^2 - 1}, & \text{la } n \text{ impar} \end{cases} \tag{18}$$

şi, deoarece fiecare din cele n partide este reprezentat în organul electiv, adică $x_i \geq 1$, $i = \overline{1,n}$, are loc relația $2 \leq n \leq M$; deci $\widehat{I}_{Ga}^* = 25\%$. Atunci pentru valoarea maximă $\widehat{I}_{SD}^*$ a **Abaterii pătratice** I_{SD}^* în cazul soluției optime, ținând cont de relația (3), obținem $\widehat{I}_{SD}^* = 25\sqrt{2}\% \approx 35{,}4\%$.

Valoarea minimă $\breve{I}_H^*$ a **indicelui d'Hondt** I_H^* pentru soluția optimă se determină ca [7]

$$\breve{I}_H^* = 100 \min \frac{n}{2n-1} > 50\%, \text{iar } \lim_{n\to\infty} \frac{100n}{2n-1} = 50\% \tag{19}$$

şi $I_H^* \in (50;100]\%$.

Valoarea maximă $\widehat{I}_L^*$ a **indicelui Lijphart** I_L^* pentru soluția optimă se determină ca [7]

$$\widehat{I}_L^*(M) = \max\left\{\frac{100}{M}\left(1 - \frac{1}{M}\right)\right\}, \tag{20}$$

funcția $\widehat{I}_L^*(M)$ fiind descrescătoare față de M. Deci, ținând cont că $M \geq 2$, avem $\widehat{I}_L^* = 25\%$.

Valoarea I_{S-L}^* a indicelui $I_{S\text{-}L}$ pentru soluția optimă în sensul minimizării **indicelui Sainte-Laguë** (7) se obține conform expresiei [5]:

$$I_{S-L}^* = \frac{100}{V}\left[\sum_{j=1}^{E} \frac{(\Delta x_j Q - R_j)^2}{U_j} + \sum_{j=E+1}^{n} \frac{R_j^2}{U_j}\right], \tag{21}$$

unde mărimile $(\Delta x_j Q - R_j)^2 / U_j,\ j = \overline{1,E}$ corespund celor mai mari ΔM raporturi $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) - 1]$

la $\Delta x_i \geq 1,\ i = \overline{1,n}$. Să determinăm limita de sus $\hat{I}^*_{S-L}$ pentru I^*_{S-L}. Ținând cont că expresia (18) a fost obținută conform regulii

$$i \succ k \text{, dacă } \frac{V_i}{2(a_i + \Delta x_i) - 1} > \frac{V_k}{2a_k + 1}, \tag{22}$$

se poate uşor conchide că expresia din paranteze pătrate în formula (21) are valoarea cea mai mare în cazul în care au loc egalitățile (în caz de egalitate în (22), preferințele privind cele două partide, *i* şi *k*, sunt egale) [5]:

$$\frac{2(a_j + \Delta x_j) - 1}{U_j} = \frac{2x_j - 1}{U_j} = \frac{2a_k + 1}{U_k} = \text{const} = p,\ j = \overline{1,E}, k = \overline{E+1,n}. \tag{23}$$

Din (21) se poate observa că al doilea factor din parantezele pătrate, pentru aceleaşi valori ale mărimilor R_j, $j = \overline{E+1,n}$, este cu atât mai mare cu cât sunt mai mici valorile mărimilor U_j, $j = \overline{E+1,n}$. Deci valoarea maximă a I^*_{S-L}, ținând cont de condiția $a_j \geq 1$, $j = \overline{E+1,n}$, se obține la $a_j = 1 = a_0$, $j = \overline{E+1,n}$. De aici, luând în considerare (20), avem şi $U_j = U_0$, $j = \overline{E+1,n}$.

Vom considera, inițial (situația A), că nu doar $a_j = 1 = a_0$, $j = \overline{E+1,n}$, dar şi $a_i \geq 1$, $i = \overline{1,E}$, adică $a_i \geq 1$, $i = \overline{1,n}$. Ulterior, se va cerceta şi situația B, în care $a_i = 0$, $i = \overline{1,E}$.

***Situația* A**. Fie $a_i \geq 1$, $i = \overline{1,n}$. Să comparăm două cazuri, pentru care sunt comune mărimile: *M*; *n*; *V*; ΔM; $a_j \geq 1, j = \overline{1,E}$; $a_j = a_0 = 1, j = \overline{E+1,n}$; $\Delta x_j \geq 1$, $j = \overline{1,E} \setminus l$; $\Delta x_j = 0, j = \overline{E+2,n}$ şi suplimentar:

1) pentru cazul 1: U_j, $j = \overline{1,n}$; $\Delta x_l \geq 2$; $\Delta x_{E+1} = 0$;

$$(2x_j - 1)/U_j = (2a_0 + 1)/U_0 = p,\ j = \overline{1,E},\ k = \overline{E+1,n}; \tag{24}$$

2) pentru cazul 2: U''_j, $j = \overline{1,n}$; $\Delta x''_l = \Delta x_l - 1$; $\Delta x''_{E+1} = 1$;

$$(2x''_j - 1)/U''_j = (2a_0 + 1)/U''_0 = p'',\ j = \overline{1,E+1},\ k = \overline{E+2,n}. \tag{25}$$

Din (24) avem

$$U_j = \frac{1}{p}\begin{cases} 2x_j - 1, j = \overline{1,E} \\ 2a_0 + 1, j = \overline{E+1,n} \end{cases} \tag{26}$$

şi, ținând cont că $R_j = U_j - Qa_j$, $j = \overline{1,n}$,

$$R_j = -Qa_j + \frac{1}{p}\begin{cases} 2x_j - 1, j = \overline{1,E} \\ 2a_0 + 1, j = \overline{E+1,n} \end{cases}. \tag{27}$$

În mod similar pentru cazul doi, din (25) avem

$$U''_j = \frac{1}{p''}\begin{cases} 2x''_j - 1, j = \overline{1,E+1} \\ 2a_0 + 1, j = \overline{E+2,n} \end{cases} = \frac{1}{p''}\begin{cases} 2x_j - 1, j = \overline{1,E} \setminus l \\ 2x_j - 3, j = l \\ 2a_0 + 1, j = \overline{E+1,n} \end{cases}. \tag{28}$$

$$R''_j = -Qa''_j + \frac{1}{p''}\begin{cases} 2x''_j - 1, j = \overline{1,E+1} \\ 2x_j + 1, j = \overline{E+2,n} \end{cases} = -Qa''_j + \frac{1}{p''}\begin{cases} 2x_j - 1, j = \overline{1,E} \setminus l \\ 2x_j - 3, j = l \\ 2a_0 + 1, j = \overline{E+1,n} \end{cases}. \tag{29}$$

Deoarece suma resturilor R_j, $j = \overline{1,n}$ este egală cu ΔMQ, ținând cont de (24), avem $\Delta MQ = -Q(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + p^{-1}[2(x_1 + x_2 + \ldots + x_E) - E] + ([2(x_{E+1} + x_{E+2} + \ldots + x_n) + n - E]\}$, de unde, ca rezultat al unor transformări simple, obținem

$$p = \frac{n + 2(M - E)}{V}. \tag{30}$$

În mod similar cu (30), pentru cazul doi are loc $p'' = n + 2(M - E'')/V$, de unde, luând în considerare că $E'' = E + 1$, avem

$$p'' = \frac{n + 2(M - E - 1)}{V}. \tag{31}$$

Să determinăm diferența ΔI^*_{S-L} dintre valorile criteriului I^*_{S-L} pentru aceste două cazuri

$$\Delta I^*_{S-L}(A) = I^*_{S-L}(A, E'') - I^*_{S-L}(A, E) = \frac{100}{V}\left[\sum_{j=1}^{E+1}\frac{(\Delta x''_j Q - R''_j)^2}{U''_j} + \sum_{j=E+2}^{n}\frac{(R''_j)^2}{U''_j} - \sum_{j=1}^{E}\frac{(\Delta x_j Q - R_j)^2}{U_j} - \sum_{j=E+1}^{n}\frac{R_j^2}{U_j}\right],$$

de unde, ca rezultat al unor transformări ordinare, obținem

$$\Delta I^*_{S-L}(A) = \frac{100}{V}\left\{Q^2\left[\sum_{j=1}^{E}\left(\frac{1}{U''_j} - \frac{1}{U_j}\right)x_j^2 + a_0^2(n-E)\left(\frac{1}{U''_0} - \frac{1}{U_0}\right) - \frac{2x_j - 1}{U''_j} + \frac{2a_0 + 1}{U''_0}\right] + \sum_{j=1}^{E}(U''_j - U_j) + (n-E)(U''_0 - U_0)\right\}. \tag{32}$$

Din (26) şi (28), obținem

$$U''_j - U_j = \begin{cases} \dfrac{2x_j - 1}{p''} - \dfrac{2x_j - 1}{p}, j = \overline{1, E} \setminus l \\ \dfrac{2(x_j - 1) - 1}{p''} - \dfrac{2x_j - 1}{p}, j = l \end{cases} = (2x_j - 1)\left(\frac{1}{p''} - \frac{1}{p}\right) - \begin{cases} 0, j = \overline{1, E} \setminus l \\ \dfrac{2}{p''}, j = l \end{cases}, \tag{33}$$

$$U''_0 - U_0 = (2a_0 + 1)\left(\frac{1}{p''} - \frac{1}{p}\right), \tag{34}$$

$$\frac{1}{U''_j} - \frac{1}{U_j} = \begin{cases} \dfrac{p''}{2x_j - 1} - \dfrac{p}{2x_j - 1}, j = \overline{1, E} \setminus l \\ \dfrac{p''}{2(x_j - 1) - 1} - \dfrac{p}{2x_j - 1}, j = l \end{cases} = \frac{-2}{V(2x_j - 1)} + \begin{cases} 0, j = \overline{1, E} \setminus l \\ \dfrac{2p''}{(2x_j - 1)(2x_j - 3)}, j = l \end{cases} \tag{35}$$

$$\frac{1}{U''_0} - \frac{1}{U_0} = \frac{-2}{V(2a_0 + 1)}, \tag{36}$$

iar din (27) şi (28) avem

$$p'' - p = -\frac{2}{V} \tag{37}$$

şi

$$\frac{1}{p''} - \frac{1}{p} = \frac{V}{n + 2(M - E - 1)} - \frac{V}{n + 2(M - E)} = \frac{2V}{[n + 2(M - E)][n + 2(M - E - 1)]}. \tag{38}$$

Folosind relațiile (33)-(38), expresia (32) poate fi transformată în

$$\Delta I^*_{S-L}(A) = 200\left\{\frac{1}{n + 2(M - E - 1)} + \frac{1}{M^2}\left[\frac{[n + 2(M - E - 1)](x_l - 1)^2}{(2x_l - 1)(2x_l - 3)} - \sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j - 1} - \frac{a_0^2(n - E)}{2a_0 + 1}\right]\right\}, \tag{39}$$

care la $a_0 = 1$ ia forma

$$\Delta I^*_{S-L}(A) = 200\left\{\frac{1}{n + 2(M - E - 1)} + \frac{1}{M^2}\left[\frac{[n + 2(M - E - 1)](x_l - 1)^2}{(2x_l - 1)(2x_l - 3)} - \sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j - 1} - \frac{n - E}{3}\right]\right\} =$$

$$= 200\left\{\frac{1}{n + 2(M - E - 1)} + \frac{1}{M^2}\left[\frac{2[x_l(3M - 2n - E)(x_l - 2) + 3(M - E)]}{3(2x_l - 1)(2x_l - 3)} - \sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j - 1}\right]\right\}. \tag{40}$$

Să determinăm domeniul de definiție reciprocă al mărimilor *M*, *n* şi *E*. Deoarece $\Delta x_j \geq 1$, $j = \overline{1, E} \setminus l$ şi $\Delta x_l \geq 2$, are loc $n \geq E + 2$. Totodată, au loc relațiile: $E'' \leq \Delta M$, adică $E + 1 \leq \Delta M$ şi, deoarece $a_j \geq 1$, $j=\overline{1,n}$, are loc $\Delta M \leq M - n$. Deci $E + 1 \leq \Delta M \leq M - n$, de unde

$$M \geq n + E + 1 \geq 2E + 3. \tag{41}$$

În baza relației (41) şi ținând cont că $x_l \geq 3$, primul factor din paranteze pătrate al expresiei (40) este pozitiv. Să cercetăm semnul expresiei $F=\frac{1}{n+2(M-E-1)}-\frac{1}{M^2}\sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j-1}$, formate din ceilalți doi factori din paranteze-acoladă. Luând în considerare relația (38), primul factor al acestei expresii este, de asemenea, pozitiv. Pentru ca valoarea F să fie nenegativă, este suficient ca $F \geq 0$ pentru cea mai mare valoare a expresiei $\sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j-1}$ la $\sum_{j=1}^{E}x_j=\text{const}=M-(n-E)=M-n+E$, ținând cont că $x_j = a_j + \Delta x_j \geq 2$, $j=\overline{1,E}\setminus l$ şi $x_l \geq 3$. Considerând, temporar, că mărimile x_j, $j=\overline{1,E}$ sunt continue şi aplicând metoda multiplicatorilor Lagrange, se poate uşor demonstra că $\min\sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j-1}$ (funcția Lagrange respectivă este una unimodală cu derivatele parțiale de gradul doi pozitive), în condițiile specificate, se obține la $x_j = (M-n+E)/E$, $j=\overline{1,E}$. Astfel, $\max\sum_{j=1}^{E}\frac{x_j^2}{2x_j-1}$ se asigură la $x_j = 2$, $j=\overline{1,E}\setminus l$, $x_l = M - n + E - 2(E-1) = M - n - E + 2$. Înlocuind aceste mărimi ale x_j, $j=\overline{1,E}$ în expresia pentru F, obținem

$$F=\frac{1}{n+2(M-E-1)}-\frac{1}{M^2}\left[\frac{4}{3}(E+1)+\frac{x_l^2}{2x_l-1}\right]=\frac{1}{n+2(M-E-1)}-\frac{1}{M^2}\left[\frac{4}{3}E+\frac{x_l}{2}-\frac{13}{12}+\frac{1}{4(2x_l-1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{6M^2}\left\{\frac{M(3n-4E+6)+n(3n-11E-6)+10E(E+1)}{n+2(M-E-1)}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{3}{2x_l-1}\right]\right\}. \tag{42}$$

Deoarece $x_l \geq 3$, al doilea termen din paranteze-acoladă al expresiei (42) este pozitiv. Să determinăm semnul numărătorului $B = M(3n - 4E + 6) + n(3n - 11E - 6) + 10E(E + 1)$ al primului factor din paranteze-acoladă al expresiei (42). Ţinând cont de relația (41), avem

$$B \geq (n + E + 1)(3n - 4E + 6) + n(3n - 11E - 6) + 10E(E + 1) = 3[n(2n - 4E + 1) + 2(E + 1)^2]$$

şi, deoarece $n \geq E + 2$, are loc relația

$$B \geq 3\{(E + 2)[2(E + 2) - 4E + 1] + 2(E + 1)^2\} = 3(E + 8) > 0.$$

Astfel, $F > 0$ şi, conform (40), $\Delta I^*_{S-L}(A)>0$. Deci, pentru situația A, cazul 2 se caracterizează printr-o valoare mai mare a criteriului I^*_{S-L}, decât cazul 1, iar cea mai mare valoare a $\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\Delta M)$ este în cazul: M; n; V; ΔM; $U_j = V/n$, $j=\overline{1,n}$; $a_j = 1$, $j=\overline{1,n}$; $\Delta x_j = 1$, $j=\overline{1,\Delta M}$; $\Delta x_j = 0$, $j=\overline{\Delta M+1,n}$, pentru care $M = n + \Delta M$, $E = \Delta M$. Atunci expresia (21) ia forma

$$\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A,M,\Delta M})=\frac{100}{\mathrm{V}}\left[\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{\Delta M}}\frac{[\mathrm{Q-(U_j-Q)}]^2}{\mathrm{U_j}}+\sum_{\mathrm{j=\Delta M+1}}^{\mathrm{n}}\frac{(\mathrm{U_j-Q})^2}{\mathrm{U_j}}\right],$$

de unde, ca rezultat al unor transformări simple, obținem

$$\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A,M,\Delta M})=\frac{100\mathrm{\Delta M}}{\mathrm{M}}\left(1-\frac{2\mathrm{\Delta M}}{\mathrm{M}}\right)=\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}\left(\mathrm{A},\frac{\mathrm{\Delta M}}{\mathrm{M}}\right)=\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A},\mu), \tag{43}$$

unde $\mu = \Delta M/M$. Valoarea μ, care asigură valoarea maximă $\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A})$ a $\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A},\mu)$, se poate afla din condiția $\frac{\partial\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A},\mu)}{\partial\mu}=100(1-4\mu)=0$. Astfel, $\mu = 4$, adică $\Delta M = M/4$, unde raportul $M/4$ este un număr întreg, şi $\hat{\mathrm{I}}^*_{\mathrm{S-L}}(\mathrm{A})=\frac{100}{4}\left(1-\frac{2}{4}\right)=12{,}5\ \%$.

***Situația* B**. Fie: M; n; V; ΔM; $a_j = 0$, $\Delta x_j = 1$, $j=\overline{1,\Delta M}$; $a_j = 1$, $\Delta x_j = 0$, $j=\overline{\Delta M+1,n}$. Deci, x_j

$= 1,\ j = \overline{1,n}$ şi din relaţiile (20) la $E = \Delta M$ obţinem $\frac{1}{U_j} = \frac{3}{U_k} = \frac{1}{U_0}$, $j = \overline{1, \Delta M}$, $k = \overline{\Delta M + 1, n}$ sau $U_k = 3U_j = 3U_0$, $j = \overline{1, \Delta M}$, $k = \overline{\Delta M + 1, n}$.

Valoarea criteriului I^*_{S-L} (18) în situaţia B $I^*_{S-L}(B)$ pentru soluţia optimă se determină ca

$$I^*_{S-L}(B, M, \Delta M) = \frac{100}{V}\left[\sum_{j=1}^{\Delta M}\frac{(Q-U_j)^2}{U_j} + \sum_{j=\Delta M+1}^{n}\frac{(U_j - Q)^2}{U_j}\right] =$$

$$\frac{100}{V}\left[\Delta M\frac{(Q-U_0)^2}{U_0} + (n-\Delta M)\frac{(3U_0 - Q)^2}{U_0}\right] =$$

$$= \frac{400\Delta M}{3M}\left(1 - \frac{\Delta M}{M}\right) = \frac{400}{3}\mu(1-\mu) = I^*_{S-L}(B, \mu). \tag{44}$$

Valoarea μ, care asigură valoarea maximă $\hat{I}^*_{S-L}(B)$ a $I^*_{S-L}(B,\mu)$, se poate afla din condiţia $\frac{\partial I^*_{S-L}(B,\mu)}{\partial \mu} = \frac{400}{3}(1-2\mu) = 0$. Aşadar, $\mu = 1/2$, adică $\Delta M = M/2$, unde raportul $M/2$ rezultă cu un număr întreg, şi $\hat{I}^*_{S-L}(B) = \frac{400}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{100}{3} \approx 33{,}3$ %.

Îmbinând rezultatele obţinute pentru situaţiile A şi B, avem

$$\hat{I}^*_{S-L} = \max\{\hat{I}^*_{S-L}(A), \hat{I}^*_{S-L}(B)\} = \hat{I}^*_{S-L}(B) = 100/3 \approx 33{,}3\ \%. \tag{45}$$

Deci, disproporţionalitatea soluţiei optime, în sensul minimizării indicelui Sainte-Laguë (2), nu depăşeşte 100/3% ≈ 33,3%. Respectiv, ţinând cont de relaţia (4), valoarea maximă $\hat{I}^*_\sigma$ a **Abaterii standard relative** I^*_σ pentru soluţia optimă se determină ca $\hat{I}^*_\sigma = 10\sqrt{100/3} = 100/\sqrt{3} \approx 57{,}7\%$.

Valoarea optimă I^*_c a indicelui **Divizor general** I_c (11) se obţine prin maximizarea I_c

$$I^*_c = 100\begin{cases} 1, \text{ dacг } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M \\ d\max\left[\min\limits_{i=\overline{1,n}}\frac{V_i}{cy_i + 1}\right], \text{ oncaz contrar} \end{cases} = 100\begin{cases} 1, \text{ dacг } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M \\ \frac{a_h + dR_h}{c(a_h + \Delta x_h - 1) + 1}, \text{ oncaz contrar,} \end{cases} \tag{46}$$

unde $U_h = Q(a_h + dR_h)$ este numărul de voturi acumulate de partidul cu cel mai mic dintre cele $\Delta M \le n - 1$ cele mai mari raporturi $V_i/[c(a_i + \Delta x_i - 1) + 1]$, iar R_h – restul de la împărţirea U_h la Q. Astfel,

$$\max_{k\in K}\left\{\frac{Qa_k + R_k}{ca_k + 1}\right\} \le \frac{Qa_h + R_h}{c(a_h + \Delta x_h - 1) + 1} = \min_{j\in J}\left\{\frac{Qa_j + R_j}{c(a_j + \Delta x_j - 1) + 1}\right\}, \tag{47}$$

unde J este mulţimea partidelor pentru care $x^*_j > a_j$, iar K – mulţimea partidelor pentru care $x^*_k = a_k$, $|J| + |K| = n$ şi $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = \Delta M$.

Dacă distribuirea optimă a mandatelor nu este proporţională, adică $\Delta M > 0$, atunci $1 \le \Delta M \le n - 1$ şi cel puţin pentru un partid, inclusiv cel h, are loc $x^*_i > a_i$; deci, $\Delta x_h \ge 1$. Să determinăm limita de jos $\breve{I}^*_c$ a I^*_c. Din (46) se poate observa că

$$\text{sign}\{\partial I^*_c / \partial a_h\} = \text{sign}\{c(\Delta x_h - dR_h - 1) + 1\}. \tag{48}$$

În baza (48), să cercetăm două cazuri reciproc complementare la $\Delta x_h \ge 1$: $\Delta x_h = 1$ şi $\Delta x_h \ge 2$.

Fie $\Delta x_h \ge 2$. Atunci egalitatea (48) ia forma $\text{sign}\{\partial I^*_c / \partial a_h\} = \text{sign}\{c(1 - dR_h) + 1\}$ şi deoarece $dR_h < 1$, $c > 0$, are loc $\partial I^*_c / \partial a_h > 0$, adică funcţia $I^*_c(a_h)$ este crescătoare. Deci, pentru minimizarea I^*_c este necesară o valoare cât mai mică posibil a mărimii a_h şi, de asemenea, (conform (46)), a celei R_h. Dar, odată cu micşorarea a_h, se micşorează şi Δx_h. Astfel, a_h trebuie să ia cea mai mică valoare, la care încă are loc $\Delta x_h = 2$. De asemenea, deoarece voturile ΔU, pe care în urma distribuirii optime le pierd partidele mulțimii K, sunt egale cu voturile în exces ΔR ale partidelor mulțimii J, pentru ca valoarea R_h să fie cât mai mică, trebuie să aibă loc relațiile $|J| = 1$, $|K| = n - 1$, $\Delta M = 2$, $R_k = R_o$, $U_k = U_o$, $a_k = 1$, $\Delta x_k = 0$, $k \in K$ şi $2Q - R_h = |K|\, R_0 = (n-1)R_0$, de unde

$$R_o = (2Q - R_h)/(n - 1). \tag{49}$$

Din aceleaşi considerente, în baza (47), obținem $\dfrac{Qa_h + R_h}{c(a_h+1)+1} = \dfrac{Q+R_0}{c+1}$, înlocuind în care R_h cu expresia obținută din (49), avem $\dfrac{Qa_h + 2Q - R_0(n-1)}{Q+R_0} = \dfrac{c(a_h+1)+1}{c+1}$, de unde

$$\frac{Q(a_h+1) - nR_0}{Q+R_0} = \frac{ca_h}{c+1} \tag{50}$$

sau, din contra, înlocuind în (50) R_0 cu expresia (49), ca rezultat al unor transformări simple, obținem

$$R_h = Q\left[2 - \frac{(n-1)(c+a_h+1)}{c(a_h+n)+n}\right]. \tag{51}$$

În baza (51) şi (46), avem

$$\begin{aligned}\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h, c, n) &= \min\left\{\frac{100(a_h + dR_h)}{c(a_h + \Delta x_h - 1)+1}\right\} = \\ = \min\left\{\frac{100(a_h+n+1)[c(a_h+1)+1]}{[c(a_h+\Delta x_h-1)+1][c(a_h+n)+n]}\right\} &= 100\cdot\min\left\{\frac{a_h+n+1}{c(a_h+n)+n}\right\}.\end{aligned} \tag{52}$$

Din (52) obținem

$$sign\left\{\partial\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h, c, n)/\partial a_h\right\} = sign\{n - c\}. \tag{53}$$

Deci semnul $\partial\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h, c, n)/\partial a_h$ depinde de raportul dintre c şi n. Din (52) se observă uşor că funcția $\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h, c, n)$ este descrescătoare față de c. De aceea, valoarea c ar trebui să fie pe cât posibil mai mare. Dar, după cum rezultă din (50), această valoare este limitată de sus.

Să determinăm limita de sus pentru c. Valoarea c creşte odată cu creşterea părții stângi a egalității (50), care, la rândul său, este descrescătoare față de R_o. Din (49) se poate observa că valoarea R_o scade odată cu creşterea R_h. Cea mai mare posibilă valoare a R_h este $Q - 1$. Atunci expresia (49) ia forma $R_o = [2Q - (Q - 1)]/(n - 1) = (Q + 1)/(n - 1)$ şi din (50), ținând cont de condiția $c > 0$, obținem

$$0 < c(\Delta x_h = 2) \le \frac{a_h Q(n-1) - Q - n}{a_h(Q+1) + Q + n} < n - 1. \tag{54}$$

În baza (53) şi (54), are loc $\partial\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h, c, n)/\partial a_h > 0$. Deci funcția $\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h, c, n)$ este crescătoare față de a_h şi se confirmă cerința conform căreia valoarea a_h trebuie să fie pe cât posibil mai mică. Totodată, ținând cont de satisfacerea de către metoda cu divizor general a cerinței de monotonie [9], la $x_h = a_h + \Delta x_h = a_h + 2 > x_k = a_k = 1$, $k \in K$, trebuie să fie $U_h > U_o$, deci şi $a_h \ge a_k = 1$. Din (54), de asemenea, rezultă că nu poate să fie $a_h = 0$, deoarece, în acest caz, se cere ca $c \le -1$, ceea ce contrazice condiției (54). Dar poate fi $a_h = 1$. În acest caz, din (53) şi (54) obținem

$$\begin{gathered}\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, c, n) = \breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, a_h = 1, c, n) = 100\cdot\min\left\{\frac{n+2}{c(n+1)+n}\right\}, \\ 0 < c(\Delta x_h = 2, a_h = 1) \le \frac{n(Q+1)}{2Q+n+1}.\end{gathered} \tag{55}$$

Fie $\Delta x_h = 1$. Atunci (48) ia forma sign$\{\partial I_c^*/\partial a_h\}$ = sign$\{1 - cdR_h\}$. Deci au loc trei cazuri:

A) $\partial I_c^*/\partial a_h > 0$, dacă $cdR_h < 1$, inclusiv la $0 < c \le 1$, deoarece $dR_h < 1$;

B) $\partial I_c^*/\partial a_h = 0$, dacă $cdR_h = 1$. În acest caz are loc $c > 1$;

C) $\partial I_c^* / \partial a_h < 0$, dacă $cdR_h > 1$. În acest caz, de asemenea, $c > 1$;

***În cazul* A**, $cdR_h < 1$, funcția $I_c^*(a_h)$ este crescătoare. Ținând cont că $a_h \geq 0$, pentru varianta minimă a I_c^* are loc $a_h = 0$. Astfel, luând în considerare (46), obținem

$$\breve{I}_c^*(\mathrm{A}) = \min I_c^*(\mathrm{A}) = 100 \cdot \min\left\{\frac{a_h + dR_h}{c(a_h + \Delta x_h - 1) + 1}\right\} = 100d \min\{R_h\} \cdot \qquad (56)$$

Să determinăm valoarea R_h pentru care se asigură $\min I_c^*(A)$. Din (56) rezultă că aceasta trebuie să fie pe cât posibil mai mică. Dar, la $a_h = 0$, $\Delta x_h = 1$, conform regulii VD (10) trebuie să aibă loc inegalitatea

$$R_h = U_h = U_h/[c(a_h + \Delta x_h - 1) + 1] \geq U_k/[c(a_k + \Delta x_h - 1) + 1] = U_k/(ca_k + 1) = z_k,\ k \in K, \qquad (57)$$

unde K este mulțimea partidelor pentru care $x_k^* = a_k$. Deci, mărimile z_k, $k \in K$ trebuie să fie pe cât posibil mai mici. Totodată, deoarece voturile ΔU, pe care în urma distribuirii optime le pierd partidele mulțimii K, sunt egale cu voturile în exces ΔR ale partidelor mulțimii J pentru care $x_j^* > a_j$, trebuie să fie şi $R_k = R_o$, $U_k = U_o$, $a_k = a_o$, $k \in K$. Astfel, are loc $R_h = U_o/(ca_o + 1) = (Q + R_o)/(ca_o + 1)$, $k \in K$, de unde $R_o = R_h(ca_o + 1) - Q$.

De asemenea, la $\Delta U = \Delta R = \text{const}$, micşorarea R_h este posibilă doar din contul creşterii R_j la $\Delta x_j = 1$, $j \in J \setminus h$. Însă, ținând cont că $\Delta x_j = 1, j \in J$, această creştere este limitată de sus de condiția $\max\{U_j/[c(a_j + 1) + 1],\ j \in J\} = U_h/(ca_h + 1) = R_h$, care, în scopul micşorării R_h, se transformă în $R_h = W/[c(a + 1) + 1] = (aQ + \Delta W)/[c(a + 1) + 1]$, unde $W = U_j$, $a = a_j$, $j \in J$, iar ΔW este restul de la împărțirea W la Q. Deci $\Delta W = R_h[c(a + 1) + 1] - aQ$.

Deoarece suma tuturor celor n resturi R_i, $i = \overline{1,n}$ este egală cu ΔMQ, avem $\Delta MQ = (\Delta M - 1)\Delta W + R_h + (n - \Delta M)R_o = (\Delta M - 1)\{R_h[c(a + 1) + 1] - aQ\} + R_h + (n - \Delta M)[R_h(ca_o + 1) - Q]$, de unde

$$R_h = \frac{Q[a(\Delta M - 1) + n]}{c[(a + 1)(\Delta M - 1) + a_0(n - \Delta M)] + n}. \qquad (58)$$

Să concretizăm valoarea mărimilor ΔM, a şi a_o din expresia (58) care ar minimiza valoarea R_h. Din (57) obținem $\mathrm{sign}\{\partial z_k / \partial a_k\} = \mathrm{sign}\{1 - cdR_k\}$. Deci pot fi două cazuri:

A.1) $\partial z_k / \partial a_k \geq 0$, dacă $cdR_k \leq 1$, inclusiv la $0 < c \leq 1$, deoarece $dR_k < 1$;

A.2) $\partial z_k / \partial a_k < 0$, dacă $cdR_k > 1$. În acest caz are loc $c > 1$.

***În cazul* A.1**, $cdR_k \leq 1$, funcția $z_k(a_k)$ este crescătoare şi, deoarece $\Delta x_k = 0$, $x_k \geq 1$, $k \in K$, trebuie (la $cdR_k < 1$) şi poate (la $cdR_k = 1$) să fie $a_k = a_o = 1$, $k \in K$. Atunci expresia (58) ia forma

$$R_h(a_0 = 1) = \frac{Q[a(\Delta M - 1) + n]}{c[a(\Delta M - 1) + n - 1] + n}. \qquad (59)$$

Din (59) obținem $\mathrm{sign}\{\partial R_h(a_o{=}1)/\partial \Delta M\} = \mathrm{sign}\{n - c\}$. Deci, la $c \leq n$ are loc $\partial R_h(a_o{=}1)/\partial \Delta M \geq 0$. Ținând cont că $\Delta M \geq 1$, celei mai mici valori a R_h îi corespunde $\Delta M = 1$. Înlocuind $\Delta M = 1$ în (59), obținem $R_h(a_o{=}1, c{\leq}n) = nQ/[c(n - 1) + n]$.

La $c > n$, are loc $\partial R_h/\partial \Delta M < 0$. Ținând cont că $\Delta M \leq n - 1$, celei mai mici valori a R_h îi corespunde $\Delta M = n - 1$. Înlocuind $\Delta M = n - 1$ în (59), obținem $R_h(a_o{=}1, c{>}n) = Q[a(n - 2) + n]/\{c[a(n - 2) + n] + n - c\} = Q/\{c - (c - n)/[a(n - 2) + n]\}$ şi $R_h(a_o{=}1, c{>}n{=}2) = nQ/[c(n - 1) + n] = R_h(a_o{=}1, c{\leq}n)$. Deci, la $c > n > 2$, cu cât este mai mare a, cu atât este mai mic $R_h(a_o{=}1, c{>}n{>}2)$. Luând în considerare că $\Delta M = n - 1$, $a_h = 0$, $a_k = a_o = 1$, $k \in K$, din condiția $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M - \Delta M$, avem

$$a(\Delta M - 1) + a_h + (n - \Delta M)a_o = M - \Delta M, \qquad (60)$$

de unde $a = (M - n)/(n - 2)$. Astfel, $R_h(a_o{=}1, c{>}n{>}2) = MQ/[c(M - 1) + n]$ şi, deoarece $n \leq M$, avem $\mathrm{sign}\{R_h(a_o{=}1, c{>}n{>}2) - R_h(a_o{=}1, c{>}n{=}2)\} = \mathrm{sign}\ \{(M - n)(n - c\} < 0$. Deci $R_h(a_o{=}1, c{>}n) = \min\{R_h(a_o{=}1, c{>}n{=}2); R_h(a_o{=}1, c{>}n{>}2)\} = R_h(a_o{=}1, c{>}n{>}2) = QM/[c(M - 1) + n]$.

Aşadar, $R_h(\mathrm{A.1}) = \min\{R_h(a_o{=}1, c{\leq}n); R_h(a_o{=}1, c{>}n)\} = \min\{R_h(a_o{=}1, c{>}n{=}2); R_h(a_o{=}1, c{>}n)\} =$

$R_h(a_o=1, c>n)$, adică

$$R_h(\text{A.1}) = \begin{cases} \dfrac{nQ}{c(n-1)+n}, \text{la } 0 < c \le n \text{ şi } c > n = 2 \\ \dfrac{MQ}{c(M-1)+n}, \text{la } c > n > 2 \end{cases}. \quad (61)$$

Totodată, la $n < M$ are loc $R_h(\text{A.1},0<c\le n,c>n>2) < R_h(\text{A.1},0<c\le n,c>n=2)$.

În cazul **A.2**, $cdR_k > 1$, $c > 1$, funcţia $z_k(a_k)$ este descrescătoare şi mărimile $a_k = a_o$, $k \in K$ trebuie să fie pe cât posibil mai mari. Din (60) la $a_h = 0$ avem $a_o = [(M - \Delta M) + a(\Delta M - 1)]/(n - \Delta M)$. Deci, pentru a maximiza a_o, trebuie de minimizat a. Deoarece $a \ge 0$, trebuie de folosit $a = 0$ şi atunci $a_o = (M - \Delta M)/(n - \Delta M)$. Înlocuind expresiile pentru a şi a_o în (58), avem

$$R_h(a=0) = \frac{nQ}{\Delta M(c-1)+M+n}. \quad (62)$$

Din (62) obținem $\text{sign}\{\partial R_h(a=0)/\partial \Delta M\} = \text{sign}\{1 - c\}$. Deci, la $c > 1$, care corespunde cazului A.2, are loc $\partial R_h(a=0)/\partial \Delta M < 0$. Ținând cont că $\Delta M \le n - 1$, celei mai mici valori a R_h îi corespunde $\Delta M = n - 1$. Înlocuind $\Delta M = n - 1$ în (62), obținem.

$$R_h(\text{A.2}) = R_h(a=0, \Delta M = n-1) = \frac{nQ}{c(n-1)+M+1}, \; c > 1. \quad (63)$$

Îmbinând (61) şi (63), avem. La $1 < c \le n$ şi $c > n = 2$, are loc $\text{sign}\{R_h(\text{A.1}) - R_h(\text{A.2})\} = \text{sign}\{M - n + 1\} > 0$, deci $R_h(\text{A.2},1<c\le n,c>n=2) < R_h(\text{A.1},1<c\le n,c>n=2)$, iar la $c > n > 2$ are loc $\text{sign}\{R_h(\text{A.1}) - R_h(\text{A.2})\} = \text{sign}\{M(M - c + 1) + n(c - n)\} > 0$, deci $R_h(\text{A.2}, c>n>2) < R_h(\text{A.1}, c>n>2)$. Astfel, înlocuind în (56), obținem

$$\breve{I}_c^*(\text{A},c,M,n) = \min \begin{cases} \dfrac{100n}{c(n-1)+n}, \text{la } 0 < c \le 1 \\ \dfrac{100n}{c(n-1)+M+1}, \text{la } c > 1 \end{cases}. \quad (64)$$

Totodată, are loc inegalitatea $\breve{I}_c^*(\text{A},c>1,M,n) < \breve{I}_c^*(\text{A},0<c\le 1,M,n)$.

În cazul **B**, $cdR_h = 1$, $c > 1$, funcția $I_c^*(a_h)$ este invariantă față de a_h. Luând în considerare rezultatele deja obținute pentru cazul A şi că $a_h \ge 0$, pentru varianta minimă a $I_c^*(B)$ este oportun de folosit $a_h = 0$ ca şi în cazul A. Respectiv, luând în considerare (46), avem

$$\breve{I}_c^*(\text{B}) = \min I_c^*(\text{B}) = 100d \min R_h, \quad (65)$$

care coincide cu expresia (49) pentru $\breve{I}_c^*(A)$. Se poate uşor observa că şi condițiile deducerii expresiei (64) pentru $\breve{I}_c^*(A)$ coincid cu cele în care este necesar de dedus expresia pentru $\breve{I}_c^*(B)$, de aceea

$$\breve{I}_c^*(\text{B}) = \breve{I}_c^*(\text{B},c>1,M,n) = \breve{I}_c^*(\text{A},c>1,M,n) = \min\left\{\frac{100n}{c(n-1)+M+1}\right\}. \quad (66)$$

În cazul **C**, $cdR_h > 1$, $c > 1$, funcția $I_c^*(a_h)$ este descrescătoare. Ținând cont că $a_h \ge 0$, valoarea minimă a I_c^* se asigură de valoarea maxim posibilă a a_h. Deoarece $M = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $x_h = a_h + \Delta x_h = a_h + 1$ şi $x_i \ge 1$, $i = \overline{1,n} \setminus h$, valoarea maxim posibilă a a_h se obține la $x_i = 1$, $i = \overline{1,n} \setminus h$. Deci, $a_h = M - n$ şi

$$\breve{I}_c^*(\text{C}) = \min\left\{100\frac{M-n+dR_h}{c(M-n)+1}\right\}. \quad (67)$$

Funcția $I_c^*(\text{C}, R_h)$ în (67) este descrescătoare față de R_h. Să determinăm valoarea minimă posibilă a R_h în (67) sau, ceea ce este acelaşi lucru, valoarea maximă posibilă a $\Delta R_h = Q - R_h$. Deoarece $\Delta U = \Delta R$, avem $\max\{\Delta R_h\} = \max\{\Delta R\}$, deci $\Delta M = 1$. Totodată, valoarea R_h este limitată de jos de condiția (10), care, în acest caz, ia forma

$$\frac{a_h Q + R_h}{ca_h + 1} = \frac{U_h}{ca_h + 1} = \frac{U_k}{ca_k + 1} = \frac{Q + R_k}{c+1} = \frac{Q + R_0}{c+1}, \quad k \in \mathrm{K}, \tag{68}$$

unde $R_0 = R_k$, $k \in \mathrm{K}$ se poate determina din condiția

$$Q = \Delta MQ = \sum_{1}^{n} R_i = R_h + \sum_{k \in K} R_k = R_h + (n-1)R_0,$$

şi anume

$$R_0 = \frac{Q - R_h}{n-1}. \tag{69}$$

Înlocuind în (68) R_0 prin expresia (69) şi ținând cont că $a_h = M - n$, ca rezultat al unor transformări simple obținem

$$R_h = Q\frac{M - (M-n)(n-c)}{c(M-1)+n}. \tag{70}$$

Astfel, luând în considerare (70), relația (67) se transformă în

$$\breve{I}_c^*(\mathrm{C}, c, M, n) = \min\left\{\frac{100M}{c(M-1)+n}\right\}, c > 1. \tag{71}$$

***Comasarea cazurilor* A, B *şi* C.** În scopul obținerii expresiei pentru $\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 1, c, M, n)$, să comasăm rezultatele respective privind cazurile A, B şi C. Din (64) şi (71) avem $\mathrm{sign}\left\{\breve{I}_c^*(\mathrm{A}, c > 1, M, n) - \breve{I}_c^*(\mathrm{C}, c, M, n)\right\} = = \mathrm{sign}\{-M(M+1-c) - n(c-n)\}$. Astfel,

$$\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 1, c, M, n) = 100 \cdot \min\begin{cases} \dfrac{n}{c(n-1)+n}, \text{ la } 0 < c \le n \\ \dfrac{n}{c(n-1)+M+1}, \text{ la } M = n < c \text{ sau } M \ne n < c \le M + n - \dfrac{M}{M-n} \\ \dfrac{M}{c(M-1)+n}, \text{ la } M \ne n \text{ єi } c > M + n - \dfrac{M}{M-n} \end{cases} \cdot \tag{72}$$

Comasarea cazurilor $\Delta x_h = 1$ şi $\Delta x_h \ge 2$. Comparând expresiile (55) şi (72) (cazul $0 < c \le n$), obținem $\mathrm{sign}\left\{\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, c, n) - \breve{I}_c^*(\Delta x_h = 1, 0 < c \le n, n)\right\} = \mathrm{sign}\{n\text{-}c\}$. Deci, la $0 < c \le n$ are loc inegalitatea $\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 1, c, n) < \breve{I}_c^*(\Delta x_h = 2, c, n)$ şi, ținând cont de (49c), avem

$$\breve{I}_c^*(c, M, n) = \breve{I}_c^*(\Delta x_h = 1, c, M, n), \tag{73}$$

unde $\breve{I}_c^*(\Delta x_h = 1, c, M, n)$ se determină conform (72).

Ținând cont că $n \ge 2$, expresia (73) la $c = 1$ se transformă în

$$\breve{I}_c^*(c = 1, M, n) = \min\left\{\frac{100n}{2n-1}\right\} > 50\%, \tag{74}$$

care coincide cu (19), iar la $c = 2$ ia forma

$$\breve{I}_c^*(c = 2, M, n) = \breve{I}_{pS-L}^* = \min\left\{\frac{100n}{3n-2}\right\} > \frac{100}{3}\% > 33{,}3\% \cdot \tag{75}$$

În general, în baza (73) se poate uşor constata că funcția $\breve{I}_c^*(c, M, n)$ este descrescătoare față de c. În ceea ce priveşte mărimile M şi n, din (73) avem

$$\mathrm{sign}\left\{\partial \breve{I}_c^*(c, M, n) / \partial M\right\} = \begin{cases} 0, \text{ la } 0 < c \le n \\ < 0, \text{ la } M = n < c \text{ sau } M \ne n < c \le M + n - M/(M-n) \\ \mathrm{sign}\{n - c\} < 0, \text{ la } M \ne n \text{ єi } c > M + n - M/(M-n) \end{cases} \cdot \tag{76}$$

$$\operatorname{sign}\left\{\partial \breve{I}_c^*(c,M,n)/\partial n\right\} = \begin{cases} \operatorname{sign}\{-c\} < 0, \text{ la } 0 < c \le n \\ \operatorname{sign}\{M+1-c\}, \text{ la } M = n < c \text{ sau } M \ne n < c \le M + n - M/(M-n) \\ < 0, \text{ la } M \ne n \text{ și } c > M + n - M/(M-n) \end{cases} . \quad (77)$$

Astfel, funcția $\breve{I}_c^*(c,M,n)$:

1) la $0 < c \le n$ este descrescătoare față de n. Deoarece $n \le M$, avem $\breve{I}_c^*(0 < c \le n) = = \breve{I}_c^*(c = n = M) = \min\left\{\frac{100}{n}\right\} > 0\%$. Valoarea apropiată de 0% se obține la $c = n = M \to \infty$;

2) la $M = n < c$ sau $M \ne n < c \le M + n - M/(M - n)$, este descrescătoare față de M, iar, față de n, este crescătoare dacă suplimentar $c < M + 1$ (deci, deoarece $n \ge 2$, avem $\breve{I}_c^*(n = 2 < c = M+1) = \min\left\{\frac{100}{M+1}\right\} > 0\%$. Valoarea apropiată de 0% se obține la $M \to \infty$) și este descrescătoare dacă $c > M + 1$ (deci, deoarece $n \le M$, avem $\breve{I}_c^*(M+1 = n+1 < c) = = \min\left\{\frac{100M}{c(M-1)+M+1}\right\} > 0\%$. Valoarea apropiată de 0% se obține la $c \to \infty$);

3) la $M \ne n$ și $c > M + n - M/(M - n)$, este descrescătoare atât față de M, cât și față de n. Deoarece $M \ge n \ge 2$, avem $\breve{I}_c^*(M \ne n, c > M + n - M/(M-n)) = \breve{I}_c^*(M = 3, n = 2 < c) = . = \min\left\{\frac{150}{c+1}\right\} > 0\%$ Valoarea apropiată de 0% se obține la $c \to \infty$.

Astfel, în toate cele trei cazuri $\lim\limits_{c\to\infty} \breve{I}_c^*(c) = 0\,\%$.

Metoda cu divizor trunchiat ($0 \le \Delta x_i \le 1$, $i = \overline{1,n}$) urmărește reducerea valorii indicelui I_d la respectarea cerinței de monotonie [9]. Totodată, deoarece limita de jos $\breve{I}_c^*$ a indicelui Divizor general I_c^* se obține la $0 \le \Delta x_i \le 1$, $i = \overline{1,n}$ (vezi (72) și (73)), se poate aplica în acest scop și indicele $I_{c1}^* = I_c^*(c, M, n, 0 \le \Delta x_i \le 1, i = \overline{1,n})$, pentru care este valabil același domeniu de definiție ca și la metoda cu divizor general.

Să determinăm domeniul de definiție al indicelui I_d aplicat la metoda cu divizor trunchiat – I_{dc1}. În acest caz, este vorba despre folosirea unei metode de optimizare și de aceea nu este aplicabil cazul general, deși limita de jos a I_{dc1}, atât în cazul general, cât și pentru soluțiile optime, se obține dacă au loc egalitățile (1), este egală cu 0 și corespunde reprezentării proporționale. Limita de sus $\widehat{I}_{dc1}^*$ a I_{dc1} pentru soluțiile optime, luând în considerare (9), se determină ca

$$\widehat{I}_{dc1}^* = \max I_{dc1}^* = \max\left\{\min \sum_{i=1}^{n} |v_i - m_i|\right\} = \max\left\{\min_{J,K} \frac{100}{V}\left[\sum_{j\in J}(Q - \Delta V_j) + \sum_{k\in K}\Delta V_k\right]\right\}, \quad (78)$$

unde J este mulțimea partidelor pentru care $x_j^* > a_j$, iar K – mulțimea partidelor pentru care $x_k^* = a_k$. Din (78) se poate observa că $\max I_{dc1}^*$ se obține la $\min V$, deci au loc relațiile: $M = n$; $a_j = 0$, $\Delta x_j = 1$, $j \in J$, $|J| = \Delta M$; $a_k = 1$, $\Delta x_k = 0$, $k \in K$, $|K| = M - \Delta M$ și

$$\frac{V_j}{ca_j + 1} = \frac{V_k}{ca_k + 1}, j \in J, k \in K, \quad (79)$$

de unde $V_j = W_o$. $j \in J$ și $V_k = V_o$. $k \in K$. Astfel, din (79) obținem $V_o = W_o\,(c + 1)$ și din condiția $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V$ avem $\Delta M W_o + (M - \Delta M)V_o = V$, de unde $W_o = V/[c(M - \Delta M) + M]$. Înlocuind în (78), ca rezultat al unor transformări simple obținem

$$\widehat{I}_{dc1}^* = \max\left\{\frac{200\Delta M c(M - \Delta M)}{M[c(M - \Delta M) + M]}\right\} = \max\left\{\frac{200\Delta M}{M\{1 + M/[c(M - \Delta M)]\}}\right\}. \quad (80)$$

Din (80) avem $\operatorname{sign}\left\{\partial \widehat{I}_{dc1}^* / \partial \Delta M\right\} = \operatorname{sign}\left\{M(M - \Delta M) + c(M - \Delta M)^2\right\}$, de unde rezultă că valoarea maximă a I^*_{dc1} se asigură la $\Delta M = M(c + 1 - \sqrt{c+1})/c$. Funcția $\Delta M(c)$ este crescătoare şi, după cum se poate observa din (80), este crescătoare şi funcția $\widehat{I}^*_{dc1}(c)$. Astfel, pentru ΔM trebuie folosită valoarea maximă posibilă, care, ținând cont că $\Delta M \le n - 1 = M - 1$, este $M - 1$. Deci, expresia (80) se reduce la

$$\widehat{I}^*_{dc1} = \max\left\{\frac{200(M-1)}{M(1+M/c)}\right\} < 200\,\%. \tag{81}$$

Valoarea limită de 200% în (81) se obține la $M \to \infty$, $M/c \to 0$. Dacă $c = n/\Delta M = M/\Delta M$ (conform [8]), atunci (81) ia forma

$$\widehat{I}^*_{dc1n} = \widehat{I}^*_{dc1}(c = n/\Delta M) = \widehat{I}^*_{dc1}(c = M/(M-1) = \max\left\{\frac{200(M-1)}{M^2}\right\} = 50\%, \tag{82}$$

în care valoarea scontată a $\widehat{I}^*_{dc1n}$ se obține la $M = 2$. Dacă $c = 2$, atunci (82) se reduce la

$$\widehat{I}^*_{dc12} = \widehat{I}^*_{dc1}(c = 2) = \max\left\{\frac{200(M-1)}{M(1+M/2]}\right\} = \frac{160}{3} = 53,(3)\%, \tag{83}$$

în care valoarea scontată a $\widehat{I}^*_{dc12}$ se obține la $M = 3$, căreia îi corespunde $\Delta M = 2$.

Puțin probabile sunt scrutinele, în care se distribuie mandate partidelor care nu au acumulat un număr de voturi mai mare decât cota simplă Q. Deseori, în acest scop, se stabileşte şi un prag electoral. De aceea, prezintă interes cazul în care $a_i \ge 1, i = \overline{1,n}$. Atunci din (78) se poate observa că max I^*_{dc1} se obține la min$V$ şi au loc relațiile: $\Delta x_j = 1$, $j \in J$; $|J| = \Delta M = 1$; $M = n + 1$; $a_i = 1$, $i = \overline{1,n}$; $\Delta x_k = 0$, $k \in K$, $|K| = M - 2$, iar condiția (79) se reduce la

$$\frac{V_j}{ca_j + 1} = \frac{V_k}{ca_k + 1} = \frac{V_0}{c+1}, j \in J, k \in K, \tag{84}$$

de unde $V_i = V_0$. $i = \overline{1,n}$. Din condiția că voturile ΔU, pe care în urma distribuirii optime le pierd partidele mulțimii K, sunt egale cu voturile în exces ΔR ale partidelor mulțimii J, are loc egalitatea $\Delta R = Q - (V_0 - Q) = (M - 2)(V_0 - Q)$, de unde obținem $V_0 = QM/(M - 1)$. Înlocuind în (79), avem

$$\widehat{I}^*_{dc1}(a_i \ge 1, i = \overline{1,n}) = \max\left\{\frac{100}{V}\left[Q - (V_0 - Q) + (M-2)(V_0 - Q)\right]\right\} = \max\left\{\frac{200(M-2)}{M(M-1)}\right\} = \frac{100}{3}\%. \tag{85}$$

În (85) valoarea minimă posibilă pentru M este 3, deoarece $n \ge 2$, iar $M = n + 1$.

5. Compararea domeniilor de definiție

În tabelul 1 sunt prezentate date comparative privind domeniul de definiție, general (p. 3) şi cel al soluției optime (p. 4), în sensul fiecăruia din cei 12 indici cercetați.

Tabelul 1

Domeniul de definiție al celor 12 indici cercetați

Indici	Domeniul de definiție al valorilor indicilor (%)			
	în caz general		pentru soluția optimă	
	min	max	min	max
Indici de disproporționalitate				
Rae (I_{Rae})	0	100	0	25
Loosemore-Handby (I_{L-H})	0	100	0	25
Grofman (I_{Gr})	0	200	0	50
Lijphart (I_L)	0	100	0	25
Gallagher (I_{Ga})	0	100	0	25
Abaterii pătratice (I_{SD})	0	$100\sqrt{2}$	0	$25\sqrt{2}$
Sainte-Laguë (I_{S-L})	0	∞	0	100/3

Indici	Domeniul de definiție al valorilor indicilor (%)			
	în caz general		pentru soluția optimă	
	min	max	min	max
Abaterii standard relative (I_σ)	0	∞	0	$100/\sqrt{3}$
Abaterii relative medii (I_d), inclusiv aplicat la:	0	200	0	50
metoda cu divizor trunchiat c (I_{dc1})	0	-	0	$< 200^*$
metoda cu divizor trunchiat $c = n/\Delta M$ (I_{dc1n})	0	-	0	50
metoda cu divizor trunchiat c = 2 (I_{dc12})	0	-	0	160/3
Indici de proporționalitate				
Rose (I_R)	0	100	75	100
d'Hondt (I_H)	0	100	50	100
Divizor general (I_c), inclusiv:	0	100	0	100
la c = 2 ($I_{pS\text{-}L}$)	0	100	100/3	100
trunchiat (I_{c1})	0	100	0	100

*În cazurile $a_i \geq 1, i = \overline{1,n}$, are loc $\hat{I}^*_{dc1}(a_i \geq 1, i = \overline{1,n}) = 100/3\%$.

Din tabelul 1 se poate observa că în cazul general (fără optimizare) domeniul de definiție al 7 din cei 12 indici cercetați (Rae, Loosemore-Handby, Lijphart, Gallagher, Rose, d'Hondt şi Divizor general) este [0; 100]%, iar pentru ceilalți cinci (Grofman, Abaterii pătratice, Sainte-Laguë, Abaterii standard relative şi Abaterii relative medii) limita de sus a acestuia depăşeşte 100%. În ceea ce priveşte domeniul de definiție al soluției optime, acesta se încadrează în limitele [0; 100]% pentru toți cei 12 indici. Mai mult decât atât, pentru primii 11 indici, excepție fiind doar indicele Divizor general, domeniul de definiție al soluției optime este de cel puțin două ori mai îngust decât cel general: este finit pentru indicii Abaterii standard relative ($100/\sqrt{3}$) şi Sainte-Laguë (100/3); de patru ori mai mic – pentru indicii Rae, Loosemore-Handby, Lijphart, Grofman, Gallagher, Abaterii pătratice, Abaterii relative medii şi Rose şi de două ori mai mic – pentru indicele d'Hondt. Pentru toți indicii de disproporționalitate, limita de jos a soluției optime este 0, iar cea de sus (cu excepția Abaterii standard relative, pentru care limita de sus este de ≈ 57,7%) nu depăşeşte 50%. Pentru primii doi indici de proporționalitate (Rose şi d'Hondt), limita de sus este 100%, iar cea de jos este de cel puțin 50%.

Pentru unicul din cei 12 indici – cel Divizor general, domeniul de definiție este [0; 100]% atât în cazul general, cât şi pentru soluțiile optime. De asemenea, domeniul de definiție al Abaterii relative medii, aplicate la metoda cu divizor trunchiat (I_{dc1}), este [0; 200]% şi coincide cu cel al Abaterii relative medii în caz general. În ambele cazuri, acest fapt se lămureşte prin posibilitatea creşterii la infinit a mărimii c. Totodată, dacă $a_i \geq 1, i = \overline{1,n}$, atunci $\hat{I}^*_{dc1}(a_i \geq 1, i = \overline{1,n}) = 100/3\%$.

Mai mult decât atât, folosirea pentru c a unor valori mai mari decât n ar putea favoriza, de regulă, doar partidele mici [8]. De exemplu, la $c > \max\limits_{(i,k)=\overline{1,n}, i \neq k} \{2Q/(\Delta V_i + \Delta V_k)\}$ pot fi favorizate, conform [8], doar partidele mici, ceea ce nu se practică. De aceea, de obicei, $c \leq \max\limits_{(i,k)=\overline{1,n}, i \neq k} \{2Q/(\Delta V_i + \Delta V_k)\}$; ținând cont că $\min\limits_{i=\overline{1,n}} \{\Delta V_i > 0\} = 1$, obținem $c \leq Q$. Dar, în general, urmând [8], mai frecvente ar putea fi cazurile $1 \leq c \leq n$.

De asemenea, indicele Divizor general, cu excepția cazului c = 1 (d'Hondt), nu are o interpretare clară a proporționalității. La c = 2, acesta ar putea fi folosit pentru metoda Sainte-Laguë, având un domeniu de definiție mai acceptabil în cazul general ([0; 100]%), decât indicele Sainte-Laguë ([0; ∞]%). Însă, la valori mari ale c, valoarea acestui indice poate fi, chiar şi pentru soluțiile optime, apropiată puternic de 0. De aceea, în asemenea cazuri, acesta ar putea fi util doar în cercetări speciale, cum ar fi favorizarea de partide [8], monotonia metodelor cu divizor [9] etc.

De menționat, totodată, că metoda cu divizor general la n = 2 şi $c = 2Q/(\Delta V_1 + \Delta V_2) = 2$ (coincide cu metoda Sainte-Laguë) asigură aceeaşi soluție ca şi cea Hamilton [8]. Deoarece metoda cu divizor general (şi cea Sainte-Laguë) este monotonă, este monotonă, la n = 2, şi metoda Hamilton.

6. Concluzii

Pentru sisteme de votare cu reprezentare proporțională, este cercetat comparativ domeniul de definiție general (fără optimizare) şi cel al soluțiilor optime a 12 indici de apreciere a disproporționalității voinței decidenților în decizie: Rae, Loosemore-Handby, D'Hondt, Sainte-Laguë, Rose, Grofman, Lijphart, Gallagher, Abaterii pătratice, Abaterii standard relative, Abaterii relative medii şi Divizor general. Pentru trei din aceşti indici, Grofman (200%), Abaterii relative medii (200%) şi Abaterii pătratice ($100\sqrt{2}$ %), disproporționalitatea maximă posibilă depăşeşte considerabil 100%, iar pentru doi din ei, Sainte-Laguë şi Abaterii standard relative, este chiar ∞. Aceasta conduce, la prima vedere, la o interpretare dificilă a rezultatelor estimării disproporționalității în cazuri concrete.

Diminuează, într-o oarecare măsură, din incertitudinea interpretării în cauză luarea în considerare a domeniului de definiție al indicilor cercetați pentru soluțiile optime respective. În acest scop, preliminar, sunt determinate şi domeniile de definiție ale soluțiilor optime la aplicarea indicilor Sainte-Laguë, Abaterii standard relative şi Divizor general. Rezultatele obținute în cazul soluțiilor optime arată că pentru cei nouă indici de disproporționalitate limita de sus nu depăşeşte $100/\sqrt{3} \approx$ 57,7% (cea de jos fiind 0%), iar pentru indicii de proporționalitate Rose şi d'Hondt limita de jos este de cel puțin 50% (cea de sus fiind 100%).

Domeniile de definiție pentru soluțiile optime pot fi utile la selectarea indicelui de apreciere a disproporționalității pentru sisteme cu reprezentare proporțională concrete, în funcție de situație.

Referințe:

1. Gallagher, M., Mitchell, P. *The Politics of Electoral Systems*. – London: Oxford University Press, 2008. 672 p.
2. Lijphart, A. *Electoral Systems and Party Systems*. – Oxford: Oxford University Press, 1994.
3. Gallagher, M. *Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems. In: Electoral Studies*. 1991, 10:1, p. 33-51.
4. Norris, P. *Electoral Engineering: Voting Rules and Political Behavior*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
5. Bolun, I. *Algorithmization of optimal allocation of seats in PR systems. In: Economica*. 2011, vol. 77, nr.3, p. 137-152. – Chişinău: Editura ASEM.
6. Bolun, I. *Seats allocation in party-list elections*. *In*: *Economica*. 2011, vol. 76, nr.2, p. 138-151.
7. Bolun, I. *Disproporționalitatea soluției optime în unele sisteme RP. În: Conferința ştiințifică a colaboratorilor, doctoranzilor şi studenților UTM*, Chişinău, 16-17 dec. 2011. – Chişinău: UTM, 2012.
8. Bolun, I. *Disproporționalitatea unor reguli „voturi-decizie” în sisteme RP. În: 20 de ani de reforme economice, confer. şt. intern.*, 23-24 sept. 2011. Vol. I. – Chişinău: Editura ASEM, 2011. – p. 425-430.
9. Bolun, I. *„Votes-decision” monotone method in PR systems. In: Economica*, nr.4(78)/2011. - Chişinău: Editura ASEM. – p. 108-117.

ROLUL STRATEGIC AL CONCEPTULUI DE MANAGEMENT AL CUNOŞTINȚELOR ÎN DEZVOLTAREA SISTEMELOR INFORMATICE MANAGERIALE

Prof. univ. dr. hab. Ilie Costaş, ASEM
e-mail: costas.ilie@yahoo.com

The article focuses on the necessity of a systemic approach to the design of management information systems from the perspectives of knowledge management (KM). The main objective is to emphasize the fact that in the actual conditions researchers and practitioners should take into consideration that management information systems (MIS) should become a fundamental infrastructure for KM and, at the same time, KM should be integrated as a strategy in the MIS development. The conclusions are based on the results of analyses of mutual interrelations among the information management (MIS, in particular), knowledge management and quality management.

Cuvinte-cheie: *sistem informatic managerial, managementul cunoştințelor, managementul informațional, managementul calității TI şi serviciilor informaționale, principii de proiectare a sistemului informatic managerial.*