CICLODA ȘI PROBLEMA CELEI MAI RAPIDE COBORÂRI

Nadejda LICA*, Ana PRODAN

Departamentul Ingineria Software și Automatică, TI-215, TI-216, FCIM, Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

*Autorul corespondent: Nadejda Lica, e-mail: nadejda.lica@isa.utm.md

Abstract. *În acest articol se studiată cicloida cu ajutorul calcului integral și apoi problema celei mai rapide coborâri fără alunecare a unui corp sub acțiunea forței gravitaționale. Această problemă se rezolvă cu ajutorul calculului diferențial, aplicând aspectul geometric al problemei. Se determină mai întâi ecuațiile cicloidei, lungimea unui arc al ei și aria mărginită de el și axa OX. Apoi se studiază problema celei mai rapide coborâri și se deduce ecuația diferențială a curbei ce reprezintă soluția acestei probleme. Se arată, că cicloida este curba celei mai rapide coborâri și are, de asemenea, proprietatea tautocronismului, prin care Huygens a îmbunătățit pendulul lui Galileo.*

Cuvinte-cheie: *cicloidă, calcul integral și diferențial, curbă Brahistocrone , ecuația diferențială a curbei celei mai rapide coborâri, tautocronism.*

Introducere

În natură și știință există o mulțime de lucruri interesante, misterioase. Multe din ele se studiază în cadrul orelor de matematică și fizică. Astfel, în cadrul lecțiilor de matematica am studiat diferite linii remarcabile, una dintre care fiind cicloida - o adevărata «enigmă a matematicii și naturii». Cicloida estre o curbă trasată de un punct al unui cerc ce se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă. Cicloida are proprietăți remarcabile, pe care le vom analiza cu ajutorul formulelor matematice, aplicând legile fizicii. Vom calcula lungimea unui arc al cicloidei și aria mărginită de el și axa OX. Apoi vom studia problema celei mai rapide coborâri și vom deduce ecuația diferențială a curbei ce reprezintă soluția acestei probleme. Vom arăta, că tocmai cicloida este soluția problemei. De menționat, că cicloida are multe aplicații în diferite domenii, așa ca mecanica, hidraulică, construcții etc. Această curbă remarcabilă joacă un rol important în crearea diferitor dispozitive. Astfel găsim aplicații ale cicloidei și în unele sporturi, de exemplu în crearea de piste și trambuline pentru skateboarding și schi.

1. Definiția cicloidei, graficul și ecuatiile ei parametrice

Cicloida a fost studiată de Nicolaus Cusanus și mai târziu de Mersenne. A fost denumită astfel de către Galileo în 1599. Cicloida a fost numită „Elena geometrilor" deoarece a cauzat certuri frecvente între matematicienii secolului al XVII-lea.

Cicloida este o curbă plană descrisă de traiectoria unui punct fix de pe un cerc de rază R, care se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă fixă - axa OX (figura 1).

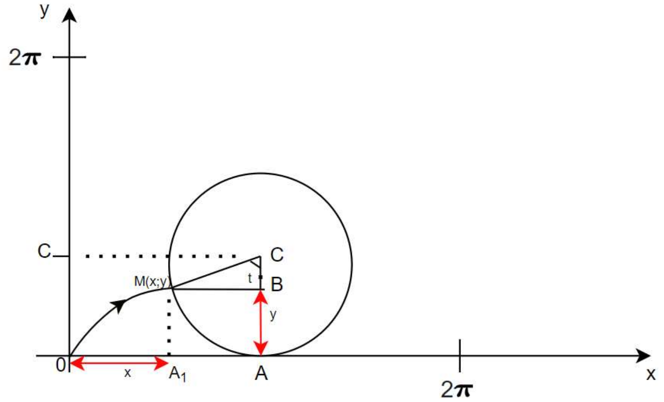

Figura 1.

Din figura 1, deducem ecuațiile parametrice ale cicloidei. Observăm, că $y = CA - CB$. Lungimea segmentului CA este egală cu raza cercului ($CA = R$), iar lungimea segmentul CB îl vom exprima din ΔCBM – dreptunghic, în care $m(< B) = 90°$, $CM = R$. Obținem, că $CB = CM \cos t = R \cos t$. Astfel, am dedus ecuația parametrică pentru variabila *y* :

$$y = R - R\cos t = R(1 - \cos t) \tag{1.1}$$

De asemenea din figura 1 observăm, că $x = OA - OA_1$. Cum cercul se mișcă fără alunecare, avem, că $OA = \overset{\frown}{AM} = Rt$. Din ΔCBM deducem, că $AA_1 = MB = R\sin t$. Prin urmare, ecuația parametrică pentru variabila x va fi

$$x = Rt - R\sin t = R(t - \sin t) \tag{1.2}$$

Astfel, ecuațiile parametrice ale cicloidei sunt date de formulele (1.1) și (1.2).

2. Calculul lungimii și ariei unui arc de cicloidă

În figura 2 este reprezentat un arc al cicloidei, obținut la rostogolirea unui punct situat pe un cerc de rază R.

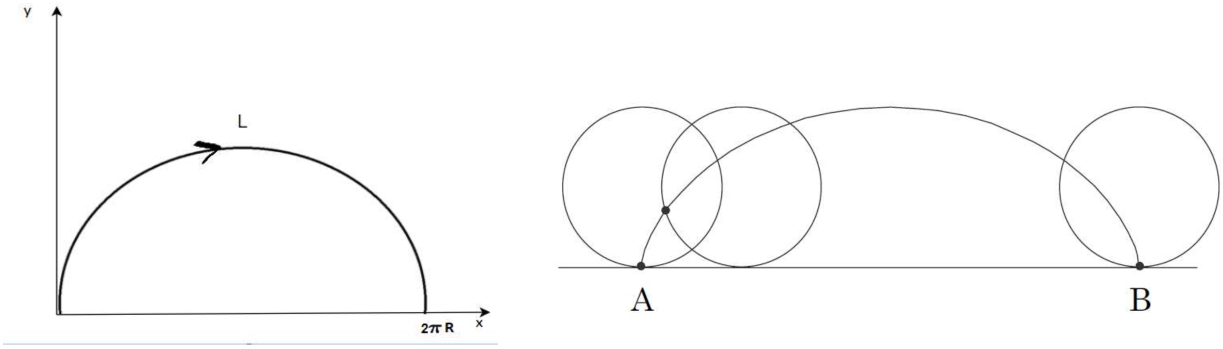

Figura 2

Lungimea acestui arc al cicloidei se calculează cu ajutorul integralei curbilinii, aplicând formula:

$$l = \int_A^B ds \quad , \quad ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \tag{2.1}$$

unde în baza formulelor (1.1) și (1.2) avem: $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]$ (2.2)

Înlocuim relațiile (2.2) în (2.1) și obținem :

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(2 - 2\cos t)}\, dt$$

$$l = \int_0^{2\pi} 2Rsin(0{,}5t)\, dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin(0{,}5t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = 4R \int_0^{\pi} \sin(\mathrm{x})\, dx = 4R(-\cos(x))|_0^{\pi} = 8R \tag{2.3}$$

Formula de calcul a ariei figurii mărginite de un arc al cicloidei și axa OX este:

$$A_f = \int_0^{2\pi} y\, dx \tag{2.4}$$

$$A_f = \int_0^{2\pi} R^2(1 - \cos t)^2 dt = R^2(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{2}\cos t \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi R^2 \tag{2.5}$$

Concluzie: Lungimea cicloidei $l = 8R\ iar\ aria\ A_f = 3\pi R^2$

3. Problema celei mai rapide coborâri si soluționarea ei

Se spune, că Galileo (1564-1642) a prezentat pentru prima dată această problemă care mai este cunoscută și sub numele de problema determinării *curbei Brahistocrone*. Curba dată a fost numită ulterior brahistocrona (din greacă *βραχιστος* - cea mai scurtă și *χρονος* - timp) - traiectoria celei mai rapide coborâri. Problema a fost rezolvată independent în moduri diferite de Leibniz, Jacob Bernoulli (fratele lui I. Bernoulli), G. Lopital, I. Newton și Johann Bernoulli însuși. Aceasta a fost prima problemă de calcul variațional, o ramură a matematicii care nu fusese încă creată la acea vreme. Soluția lui J. Bernoulli s-a remarcat față de toate cele prezentate atât prin non-trivialitatea sa, cât și prin caracterul comun al metodelor utilizate .

- Primul principiu de la care J. Bernoulli a procedat la rezolvare a fost că, dacă o curbă are vreo proprietate, atunci orice parte a acesteia trebuie să aibă aceeași proprietate. Această idee a făcut posibilă descompunerea unei sarcini complexe în mai multe sarcini mai simple.
- Al doilea principiu este o idee foarte originală de aplicare a legilor opticii în mecanică. Legea opticii în cauză se numește principiul lui Fermat: Dintre toate căile posibile, lumina alege calea care durează cel mai puțin timp.
- Din acest singur postulat urmează toate legile opticii geometrice, în special legea refracției luminii la granița a două medii, descoperită de olandezul W. Snell (van Snel van Royen) în 1621.

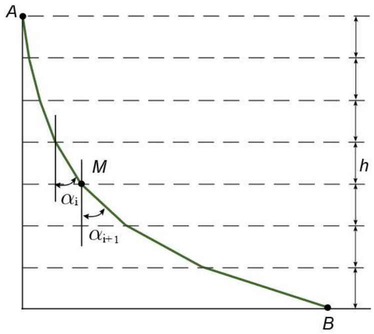

Figura 3

Din figura 3 poate fi dedus că,

$$\frac{\sqrt{y}}{\cos\alpha} = c \tag{3.1}$$

unde c- este coeficientul de proporționalitate, iar α- unghiul dintre tangenta dusă în punctul cu coordonatele (*x, y*) al curbei și axa *OX.*

Cunoaștem, că panta tangentei la graficul unei funcții este egală cu derivata funcției calculată în punctul de tangență:

$$k = y' = \operatorname{tg}\alpha\ . \tag{3.2}$$

Exprimăm *cos α* din identitatea $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$
și obținem că

$$cos\ \alpha = \ 1/\sqrt{(1 + (tg^2\alpha)} \tag{3.3}$$

Din (3.2) și (3.3) obținem:

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{3.4}$$

Înlocuind (3.4) în ecuația (3.1) obținem *ecuația diferențială a curbei celei mai rapide coborâri:*

$$y(1 + (y')^2) = c^2 \tag{3.5}$$

Vom arăta acum, că cicloida este soluția ecuației (3.5).
Folosind ecuațiile parametrice ale cicloidei (1.1) și (1.2) deducem, că:

$$y'_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{y'dt}{x'dt} = \frac{R\sin t}{R(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \tag{3.6}$$

Înlocuind expresiile (1.1) și (3.6) în ecuația (3.5), obținem:

$$y(1+(y')^2) = R(1-\cos t)\left[1+\frac{sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right] = R(1-\cos t)\frac{(1-\cos t)^2 + sin^2 t}{(1-\cos t)^2}$$
$$= R\frac{1-2\cos t + cos^2 t + sin^2 t}{1-\cos t} = 2R.$$

Prin urmare, cicloida este o soluție a ecuației celei mai rapide coborâri cu $c^2 = 2R$.

Mulțumiri

Exprimăm sincere mulțumiri profesorului nostru, conf. univ., dr. Iurie Baltag iurie.baltag@mate.utm.md, pentru îndrumarea, și susținerea în cadrul procesului de realizare a acestui articol, recunoștință pentru tema interesantă propusă , și ajutorul acordat în studiul și realizării ei.

Referințe

1. Takakuwa, S. (2003). Bibun Hoteishiki to Henbunho [Differential equations and the calculus of variations],Tokyo: Kyoritsu.
2. Richard A. Proctor *The geometry of cycloids.A treatise on the Cycloid and all forms of Cycloidal Curves , and of the useof such curves in dealing with the motions of planets, comets,&c.*Paperback - January 25,2016.
3. *The English And American Mechanic*, by B. Frank Van Cleve.
4. Fihtenholt G. *Calcul diferential si integral* , Bucuresti, 1965.