СОВРЕМЕННАЯ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Николай Ю. ТРИФОНОВ
Академик Международной инженерной академии, доцент, FRICS
Белорусский государственный экономический университет, г. Минск, Беларусь
n.t@tut.by

Abstract: *Financial (or actuarial) mathematics, based on the idea of increasing the value of money over time, is significantly used in various areas of the economy: banking, valuation, investment analysis, accounting, etc. Most textbooks are based on the school course of compound interest. With its help, formulas are obtained for the so-called six financial multipliers (functions) of constant interest. These representations were originally developed for banking, where they are successfully used. But even the transfer of ideas about the value of money in time to the insurance business required significant clarifications related to the continuity of time and the process of accumulation. These achievements should also be used in evaluation activities.*

It should also be noted that many textbooks in financial mathematics

• use cumbersome disordered Russian-language terminology, which appeared as a result of hasty translations from English in the last decade of the last century and the lack of familiarity with pre-revolutionary Russian-language terminology in this area,

• suffer from a lack of focus on calculations typical for practice using the Microsoft Excel package.

The article describes the concept of presenting the course of financial mathematics based on the continuity of interest calculation using simple Russian terminology and focusing on the use of Microsoft Excel, which corresponds to the modern practice of valuation, and also presents some results of its application.

Аннотация. *Финансовая (или актуарная) математика, основанная на идее повышения стоимости денег со временем, существенно применяется в различных областях экономики: банковском деле, оценке стоимости, инвестиционном анализе, бухгалтерском учёте и др. В основе изложения в большинстве учебников лежит школьный курс сложного процента. С его помощью получаются формулы для так называемых шести финансовых множителей (функций) постоянного процента. Эти представления первоначально разработаны для банковской деятельности, где с успехом используются. Но уже перенос представлений о стоимости денег во времени в страховое дело потребовало существенных уточнений, связанных с непрерывностью времени и процесса накопления. Эти достижения необходимо использовать и в оценочной деятельности.*

Также следует отметить, что многие учебные пособия по финансовой математике

• используют громоздкую неупорядоченную русскоязычную терминологию, появившуюся в результате поспешных переводов с английского языка в последнее десятилетие прошлого века и отсутствия знакомства с дореволюционной русскоязычной терминологией в этой области,

• страдают отсутствием ориентации на типичные для практики расчёты с помощью с помощью пакета Microsoft Excel.

В статье описана концепция изложения курса финансовой математики на основе непрерывности начисления процента с использованием простой русскоязычной терминологии *и ориентацией на применение Microsoft Excel, отвечающая современной практике оценки стоимости, а также приведены некоторые результаты её применения.*

Ключевые слова: *финансовые множители, процентная ставка, множитель накопления, множитель приведения, множитель ренты, множитель итога, множитель амортизации, множитель возмещения.*

Введение

Финансовая математика, основанная на концепции повышения стоимости денег со временем [1], существенно применяется в различных областях экономики: банковском деле, инвестиционном анализе, оценке стоимости, бухгалтерском учёте и др. В основе изложения в большинстве учебников (напр., [2-5]), лежит школьный курс сложного постоянного процента. С его помощью получаются формулы для так называемых шести финансовых множителей (функций) процента. Множитель накопления имеет вид:

$$A(t) = (1+i)^t, \qquad (1)$$

где: i – эффективная годовая ставка процента,

t – количество периодов накопления (лет).

Эти представления первоначально разработаны для банковской деятельности [6], где с успехом применяются. Но перенос идей стоимости денег во времени в страховое дело потребовало существенных уточнений, связанных с непрерывностью времени и процесса накопления (напр., [7-8]). Подобные достижения необходимо использовать и в других областях применения, так как механический перенос идеологии вида (1) имеет недостатки, иногда становящиеся существенными:

- невозможность описания многих явлений, происходящих непрерывно, таких как обесценивание, не встречающихся в традиционных приложениях финансовой математики, и
- сложность понятийного перехода между номинальной и эффективной ставками.

В качестве встречающихся недочётов многих пособий по финансовой математике также следует отметить:

- громоздкую неупорядоченную русскоязычную терминологию,
- отсутствие ориентации на расчёты с помощью ПК, типичные для практики.

Некоторые способы преодоления этих недочётов описаны в [9, главы 4-5].

Основные определения

Студенты испытывают затруднения, сталкиваясь с терминологией основных понятий финансовой математики, особенно таких, как финансовые множители. Вот наименования финансовых множителей, которые можно найти в различных русскоязычных источниках: будущая стоимость единицы, настоящая стоимость единицы, будущая стоимость аннуитета, настоящая стоимость аннуитета, взнос на амортизацию единицы, коэффициент фонда возмещения, F_1, F_2, F_3, F_3, F_4, F_5, F_6, PVF, PVAF, SFF и т.д. Возникли они в начале 90-х годов из-за неаккуратного перевода с английского при незнакомстве с дореволюционной русскоязычной терминологией.

Для упорядочения удобно было отделить *финансовые множители* финансовой математики (табл. 1) и *финансовые функции*, встроенные в Microsoft Excel. В соответствии с традицией [5] операция, противоположная накоплению, называется *приведением.* Применение вместо этого термина-кальки *дисконтирование* может привести к ошибочному представлению об использовании в этом процессе *учётной* ставки (дисконта) в то время, как в приложениях используется *процентная* ставка (процент).

Описание финансовой математики на основе непрерывности аналогично традиционному начальному изложению непрерывности в высшей математике, механике и т.п. Но условия современной высшей школы не позволяют строить изложение с математической аккуратностью, да это и не нужно для практики. Прагматично рассказывать лишь общую канву построения с упором на практические рекомендации. На этом основании, введя *множитель накопления $A(t)$*, можно перейти к соответствующей ему *процентной ставке i* (от англ. interest) на сумму в 1, инвестированную в момент 0, за время $(t,t+h)$, измеряемое в годах (процентная ставка – годовая!):

$$i_h(t) = [A(t+h)-A(t)] / [h\bullet A(t)], \tag{2}$$

Соответствующий множитель накопления будет ступенчатой функцией. Но в приложениях стоимость капитала часто должна изменяться непрерывно, поэтому вводится *интенсивность процентов* как предел (2) при $h\to 0$:

$$\delta(t) = \lim i_h(t),$$

Отсюда получается наиболее общий вид множителя накопления:

$$A(t) = \exp[\int_0^t \delta(x)dx].$$

В *модели с постоянной интенсивностью* процентов $\delta(t)=\delta$. Тогда $A(t) = \exp(\delta t)$.

Со вводом вместо нецелого h целого $p=1/h$ множитель накопления примет более употребительный вид:

$$A(t) = [1+i^{(p)}/p]^{t\bullet p}, \tag{3}$$

где $i^{(p)}$ – номинальная ставка процента, начисляемого p раз в году.

Множитель приведения вводится как обратный множителю накопления

$$v(t) = [A(t)]^{-1} = [1+i^{(p)}/p]^{-t\bullet p}, \tag{4}$$

Вместе с ним вводится понятие *учётной ставки* (обозначается d от англ. discount). При постоянных процентах

$$d^{(p)}=p\bullet\{1-\exp[-\delta/p]\}.$$

Её легко связать с процентной ставкой

$$i = d/(1-d), \tag{5}$$

Можно показать, что для любого $A(t)$

$$d<d^{(p)}<\delta<i^{(p)}<i.$$

Пример применения.

Достаточно часто при расчёте ставки капитализации в национальной валюте в качестве безрисковой ставки используется ставка рефинансирования центрального банка страны. Но следует помнить, что ставка рефинансирования по своей природе – учётная, в то время как ставки в формулах приведения типа (4) – процентные. Невнимание к этому может исказить расчёты. Если при малых значениях, типичных, например, для Европейского центрального банка, разница в значениях учётной и процентной ставок меньше обычной погрешности в расчётах оценщика, то в условиях, например Беларуси, она может сильно влиять на результат. Так, относительно недавней ставке рефинансирования в 43% будет соответствовать почти в два раза превышающая её процентная ставка в 75,44% годовых.

Аккуратное построение модели финансовой математики на основе симметрии накопления (процента, полагающейся ренты, возмещения) и приведения (дисконта, обыкновенной ренты, амортизации) интересно, но в наших условиях непрактично. Тем не менее, хотя учётные ставки (дисконт) используется лишь в банковской сфере, незнание может привести (и приводит) к ошибочной практике. По той же причине студентам указывается на различие (в определённом смысле, противоположность) в использовании термина *амортизация* в финансовой математике, банковском деле и оценке стоимости, с одной стороны, и бухгалтерском учёте, с другой.

Сводка финансовых множителей

Последовательно проводя заданные в начале рассуждения, вводятся шесть финансовых множителей (табл. 1). В левый столбец помещены финансовые множители, связанные с текущей стоимостью *PV*, а в правый – с будущей стоимостью *FV*. В каждую ячейку помещены основные формулы, определяющие финансовый множитель, а также реализующую этот множитель финансовую функцию Microsoft Excel. Нумерация множителей соответствует принятой в таблицах их численных значений (напр., [4]).

Таблица 1. Основные формулы финансовых множителей

4. Множитель приведения $v(t) = [A(t)]^{-1}$, при $\delta(t)=\delta$ $v(t)=v^t=e^{-\delta t}=[1+i^{(p)}/p]^{-tp}$, при $p=1$ $v(t)=(1-d)^t=1/(1+i)^t$ $PV = FV\bullet v(t)$ PV = ПС(i;t;0;–FV)	**1. Множитель накопления** $A(t)=\exp[\int_0^t \delta(x)dx]$, при $\delta(t)=\delta$ $A(t)=A^t=e^{\delta t}=[1+i^{(p)}/p]^{tp}$, при $p=1$ $A(t)=(1+i)^t$ $FV = PV\bullet A(t)$ FV = БС(i;t;0;–PV)
5. Множитель ренты $a_n=(1-v^n)/i$ при $p\neq 1$ $a_n= p[1-(1+i^{(p)}/p)^{-np}]/i^{(p)}$ $PV = pmt \bullet a_n$ PV = ПС(i;n;–pmt;0;Тип)	**2. Множитель итога** $S_n=(A^n-1)/i$ при $p\neq 1$ $S_n= p[(1+i^{(p)}/p)^{np}-1]/i^{(p)}$ $FV = pmt \bullet S_n$ FV = БС(i;n;–pmt;0;Тип)
6. Множитель амортизации $r_n=1/a_n=i/(1-v^n)$ $pmt = PV\bullet r_n$ pmt = ПЛТ(i;n;–PV;0;Тип)	**3. Множитель возмещения** $s_n=1/S_n=i/(A^n-1)$ $pmt = FV\bullet s_n$ pmt = ПЛТ(i;n;0;–FV;Тип)

При рассмотрении таблицы отмечается, в частности, что в Microsoft Excel множители первых двух строк таблицы в случае обоих столбцов реализуются одинаковыми финансовыми функциями. Например, множители приведения и ренты рассчитываются с помощью финансовой функции ПС, причём аргументы в ней, в случае равенства ставки и числа периодов, взаимно дополняют друг друга. (При расчёте множителя приведения на месте–*pmt* стоит 0, а при расчёте множителя ренты 0 замещает *FV*)

Студентам указывается, что это обстоятельство позволяет одной финансовой функцией реализовывать потоки, состоящие из аннуитетных платежей и конечного (или начального) платежа.

Комментарии к преподаванию

1. Ключевым в финансовой математике являются понятия *платежа* как совокупности денежной суммы вместе с моментом времени, к которому она относится, и *потока платежей* (по-английски cash flow).

Совокупность физических или юридических лиц, совершающих платежи, образуют рынок капитала. При этом в виде капитала могут выступать не только денежные суммы, но и все виды объектов оценки (недвижимость, машины и оборудование и т. д.), выражаемые их стоимостями. Таким образом, рынок капитала является одной из ипостасей *рынка объекта оценки*. Простейшими же примерами рынка капитала могут быть заём или депонирование денег в банке. Спрос и предложение на рынках капитала определяют стоимость денег, выражающуюся в виде *процентной ставки*.

Стоимость денег (процентная ставка) в реальном мире зависит от:

- целей их использования (которые отличаются рисками, различными для различных объектов оценки),
- объёма используемой суммы (то есть стоимости объекта оценки),
- срока использования суммы (то есть времени экономической жизни объекта оценки).

Т.о., на каждом рынке объекта оценки своя стоимость денег (своя процентная ставка).

Отмечаем, что в основе финансовой математики лежит модельное предположение, что только продолжительность срока использования денежной суммы влияет на стоимость её использования. Цели же использования и объёмы сумм учитываются отдельно.

2. Введя множители накопления и приведения, получаем возможность объяснить основное уравнение финансовой математики – *уравнение стоимостей*, приравнивающее два эквивалентных потока платежей в некоторый момент времени. Отмечаем, что что уравнение стоимостей в начальный момент часто называется *уравнением доходностей*.

3. При рассказе о множителях амортизации и возмещения вводится понятие *амортизационного расписания* и объясняется процесс построения этого полезного инструмента с помощью электронных таблиц Microsoft Excel. При погашении кредита, оплате покупки в рассрочку, во многих иных случаях возникает задача расчёта неоплаченной суммы долга после проведения частичной оплаты. Очевидно, что эта задача может быть решена (но не только) численным образом путём составления амортизационного расписания. Амортизационным расписанием удобно иллюстрировать процесс нормативного обесценивания со временем машин и оборудования (особенно дорожных транспортных средств), также, как *расписанием возмещения* - обесценивание зданий и сооружений.

4. В качестве наглядного применения финансовой математики в экономической теории удобно продемонстрировать вывод формулы, описывающей влияние инфляции на процентные ставки. Для этого рассматривается уравнение доходностей за один год, выраженное через параметры, которые необходимо связать между собой. Поскольку необходимо найти связь между номинальной (то есть без учёта инфляции) ставки капитализации R_n и реальной (то есть наблюдаемой на рынке) ставки капитализации R_r при наличии постоянной годовой инфляции в r процентов (так называемый индекс инфляции), то следует приравнять между собой годовое накопление по номинальной ставке капитализации с одной стороны и, с другой стороны, годовое накопление по реальной ставке капитализации с учётом действия инфляции. Это выражение называют уравнением И. Фишера, исследовавшего в начале прошлого столетия теорию процентных ставок:

$$1 + R_n = (1 + R_r)(1 + r), \qquad (6)$$

Уравнение доходностей (6) представляет собой базовое выражение для пересчёта номинальной ставки капитализации в реальную или наоборот с учётом влияния инфляции. Выразив из него реальную ставку капитализации, получаем известную *формулу Фишера*:

$$R_r = (R_n - r) / (1 + r), \qquad (7)$$

5. Одним из важнейших понятий финансовой математики и экономики вообще является понятие *вечной ренты*. Изучение вечной ренты позволяет перейти к понятию капитализации как методу реализации доходного подхода к оценке. При этом основным следует

считать изучение *метода приведённого потока платежей*, ППП (по-английски discounted cash flow, DCF), как единственного метода доходного подхода [10], частным случаем которого, в частности, является ранее употребительный метод прямой капитализации. Начав с простейшего случая дискретного потока платежей и постоянной ставки приведения, реализующегося в Microsoft Excel финансовой функцией ЧПС, следует, как минимум рассмотреть переменную ставку с включением конечного платежа. Учет переменности ставки приведения в дискретной модели описан в работе [11]. Для приведённой стоимости V с дискретными периодическими платежами в конце периода (например, арендной платой или начислением дивидендов) и конечным платежом (например, конечной продажей) была получена формула следующего вида:

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{I_t}{\prod_{j=1}^{t}(1+R_j)} + \frac{V_n}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}. \qquad (8)$$

где I_t – текущий периодический (обычно годовой) платеж; V_n – платеж в конце прогнозного периода (стоимость конечного возврата); R_j – ставка приведения в течение j-го периода (года) для периодического платежа, r_t – ставка приведения в течение t-го периода (года) для конечного возврата; n – номер последнего периода (года).

Подобную же формулу возможно вспомнить и при знакомстве с показателем эффективности инвестиционных проектов *NPV*. В этом случае можно познакомить обучающихся и с использованием реальных для некоторых проектов случаями непрерывного и дискретно-непрерывного потока платежей [12].

6. Наиболее применяемым для расчёта ставки приведения (в случае отсутствия заёмного капитала) является метод накопления (также для него встречаются названия метод наращивания, метод суммирования, метод кумулятивного построения) финансовых рисков (по-английски build-up method), связавший доходность объекта оценки с риском её потери. К сожалению, традиционное его изложение страдает неточностью.

Во второй половине прошлого века связь между доходностью и риском при торгах акциями предприятий на основе биржевой статистики была описана в модели цены финансовых вложений (по-английски capital asset price model, CAPM), модели арбитражного ценообразования (по-английски arbitrage pricing model, APM) и их модификациях. В них ставку приведения R было предложено выражать как сумму: $R = R_0 + R'$, в которой R_0 представляет собой *безрисковую ставку* (по-английски risk-free rate), а R' – премию за риск(и). Впоследствии это положение без всякого статистического обоснования было применено в методе накопления для расчёта ставок приведения при оценке предприятий, не котирующих свои акции на бирже и даже не имеющие их. Более точная формула получается из рассмотрения уравнения доходности, аналогичного уравнению (6):

$$1 + R = (1 + R_0)(1 + R'), \qquad (9)$$

При этом для расчётов премии за риск(и) следует рассмотреть исчерпывающий состав входящих в неё составляющих, независимых друг от друга. На основании одного из принципов оценки стоимости, принципа зависимости, предлагается (подробнее см. в [13]) использовать в качестве таковых премию за страновой риск, премию за отраслевой риск и поправку на объектный риск.

Премия за страновой риск (по-английски country risk premium, CRP) – это риск инвестирования средств в стране нахождения объекта оценки, связанный с потерей активов вследствие действия факторов общеэкономического, финансового и социально-политического характера, присутствующих в этой стране независимо от объекта исследования. *Премия за отраслевой риск* – это премия за риск, или доходность, деятельности, связанной с оцениваемым активом. *Поправка на объектный риск* связана непосредственно с объектом исследования (объектом оценки или инвестиционным проектом) и зависит от его физических характеристик и управления. При этом конкретные значения вышеотмеченных премий будут зависеть от выбранной *валюты оценки*. Кроме того, в соответствии с заданием на оценку, в этих значениях должна учитываться или не учитываться инфляция, при необходимости пересчётом по Фишеру используя, формулу (6) или формулу (7).

Заключение

Использование методов финансовой математики в приведенной выше интерпретации позволяет упростить изложение материала и получить удобные для применения практические результаты.

Библиографические ссылки:

1. Fisher, I. The Theory of Interest: As determined by impatience to spend income and opportunity to invest it / I. Fisher. – New York: Macmillan, 1930 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.econlib.org/Library/YPDBooks/Fisher/fshToI.html/, свободный. – Загл. с экрана.
2. Медведев, Г. А. Начальный курс финансовой математики: учебное пособие / Г. А. Медведев. – Москва: Остожье, 2000. – 267 с.
3. Фёдорова Н. Ю. Финансовые вычисления: учебное пособие / Н. Ю. Фёдорова. – Псков: Псковский гос. ун-т, 2016. – 116 с.
4. Фридман, Дж. Анализ и оценка приносящей доход недвижимости: пер. с англ. / Дж. Фридман, Н. Ордуэй. – Москва: Дело, 1995. – 480 с.
5. Четыркин, Е. М. Финансовая математика: учебник / Е. М. Четыркин. – Москва: Дело, 2007. – 320 с.
6. Лунский, Н. С. Высшие финансовые вычисления. Отдел I. Проценты. Верные ренты. Долгосрочные займы / Н. С. Лунский. – Москва: Тип. Г. Лисснера и Д. Собко, 1916. – 512 с.
7. Башарин, Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – Москва: ИНФРА–М, 1997. – 160 с.
8. Cohen, A. Financial Mathematica for Actuaries / A. Cohen. – East Lansing, MI: Michigan State University, 2016 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.pdfdrive.com/math-361-financial-mathematics-for-actuaries-i-e17655503.html/, свободный. – Загл. с экрана.
9. Трифонов, Н. Ю. Теория оценки стоимости: учебное пособие / Н. Ю. Трифонов. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 208 с.
10. Международные стандарты оценки / Пер. с англ.; Ред. колл.: И. Л. Артеменков, С. А. Табакова, М. А. Федотова, Х. М. Увайсова, А. Г. Саркисян, Н. Ю. Трифонов. – Москва: Российское общество оценщиков, 2020. – С. 51.
11. Трифонов, Н. Ю. Точная формула метода приведённого потока платежей в доходном подходе / Н. Ю. Трифонов // Вопросы оценки. – 2019. – № 3. – С. 50-52.
12. Трифонов, Н. Ю. Инвестиционный анализ проектов с дискретно-непрерывным потоком платежей и переменной ставкой / Н. Ю. Трифонов // Новая экономика. – 2021. – № 1 (77). – С. 227-231.
13. Трифонов, Н. Ю. Развитие метода накопления рисков для расчета ставки капитализации / Н. Ю. Трифонов // Экономическая наука современной России. – 2021. – № 1. – С. 7-14. – Режим доступа: https://doi.org/10.33293/1609-1442-2021-1(92)-7-14/, свободный.