EXTINDEREA PRIMEI TEOREME DE APROXIMARE A LUI WEIERSTRASS ASUPRA UNITĂŢILOR MĂRIMILOR FIZICE

Ion CERNICA, Ala TVERDOHLEB

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Rezumat: *Pornind de la relaţia de definiţie a mărimilor fizice şi de la prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass, se arătă că valoarea numerică a unei mărimi derivate oarecare şi unitatea ei se pot exprima în funcţie de valorile numerice ale mărimilor fundamentale alese, respectiv unităţile fundamentale, prin relaţii de tip monom. Teorema poate fi aplicată şi la conversiunea unităţilor. În acest caz, pentru a se trece de la valoarea numerică a unei mărimi exprimată într-un anumit sistem de unităţi la valoarea ei exprimată în alt sistem, este necesar să se înmulţească valoarea iniţială cu produsul factorilor de conversiune ai unităţilor fundamentale ridicaţi fiecare la puterea exponentului de dimensiune corespunzător.*

Cuvinte cheie: *mărime fizică, valoare numerică, unitate, sistem de unităţi, conversiunea unităţilor.*

1. INTRODUCERE

Este ştiut că Sistemul Internaţional de Unităţi cuprinde două categorii de mărimi fizice: mărimi fundamentale şi mărimi derivate. Împărţirea mărimilor fizice SI şi a unităţilor corespunzătoare în aceste două categorii nu trebuie considerată însă una absolut strictă şi impusă de legile fizicii. Dacă mărimile fundamentale sunt independente între ele şi se aleg arbitrar, atunci mărimile derivate nu posedă asemenea proprietăţi. Potrivit [1-4, 7-9], mărimile derivate se pot întotdeauna exprima în funcţie de mărimile fundamentale printr-o relaţie de tip monom

$$A = kX_1^{a_1} X_2^{a_2} \cdots X_n^{a_n}, \tag{1}$$

care respectă condiţia de omogenitate. În ecuaţia de aproximare (1) A este o mărime derivată oarecare dependentă de mărimile fundamentale $X_1, X_2, ..., X_n$, k un coeficient numeric adimensional, iar exponenţii $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere arbitrare întregi şi fracţionare, care pot avea valori pozitive, nule sau negative. În fizică, acest rezultat este cunoscut sub numele de prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass sau teorema fundamentală a analizei dimensionale.

În demonstraţiile prezentate în literatura de specialitate [1-2, 4, 7-9] se consideră că funcţia iniţială $A = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ este continuă şi derivabilă, fără să se specifice însă ipotezele acceptate tacit şi domeniul de aplicabilitate al acestei teoreme. Excepţie în acest sens face lucrarea [3] apărută recent la editura AGIR din Bucureşti, în care se arată că o mărime derivată oarecare A dependentă de trei mărimi fundamentale l, m, t poate fi exprimată printr-un produs dintre o constantă adimensională k şi puterile mărimilor fundamentale considerate numai dacă unitatea acelei mărimi derivate este egală cu produsul puterilor unităţilor fundamentale.

2. Formularea problemei

Subiectul care se propune în prezenta lucrare constă în extinderea primei teoreme de aproximare a lui Weierstrass asupra unităţilor mărimilor fizice şi determinarea domeniului de aplicabilitate al acesteia. Altă problemă abordată este stabilirea relaţiei de conversiune a unităţilor dintr-un sistem de unităţi în alt sistem.

3. Extinderea primei teoreme a aproximării asupra unităţilor

Relaţia (1) este adevărată şi în cazul în care mărimile fundamentale respective se înlocuiesc prin unităţile lor. Pentru demonstraţie se consideră o mărime derivată oarecare A care depinde de trei mărimi fundamentale din mecanică: lungimea l, masa m şi timpul t. În acest caz, ecuaţia de aproximare (1) ia forma

$$A = kl^a m^b t^c. \tag{2}$$

Exprimând toate mărimile fizice din relaţia (2) prin valorile numerice şi unităţile lor, astfel că

$$A = \{A\} \cdot < A >,\ l = \{l\} \cdot < l >,\ m = \{m\} \cdot < m >,\ t = \{t\} \cdot < t >,$$

se obţine expresia

$$A = \{A\} \cdot < A >= k(\{l\} \cdot < l >)^a \cdot (\{m\} \cdot < m >)^b \cdot (\{t\} \cdot < t >)^c . \tag{3}$$

Din relaţia (3) rezultă că dacă unităţile $< l >$, $< m >$ şi $< t >$ ale mărimilor fundamentale l, m, t se micşorează de α, β şi respectiv de γ ori, atunci valoarea numerică a mărimii derivate A se măreşte de $\alpha^a \beta^b \gamma^c$ ori.

Relaţia (3), care reprezintă un produs dintre o constantă adimensională k şi puterile mărimilor fundamentale, se poate desface într-o relaţie cu valori numerice ale mărimilor fundamentale

$$\{A\} = k\{l\}^a \{m\}^b \{t\}^c \tag{4}$$

şi alta între unităţile lor

$$< A >= (< l >)^a (< m >)^b (< t >)^c . \tag{5}$$

Astfel se constată că *valoarea numerică* $\{A\}$ *a mărimii derivate* A *este egală cu produsul dintre o constantă adimensională* k *şi valorile numerice ale mărimilor fundamentale ridicate fiecare la puterea exponentului de dimensiune corespunzător, iar unitatea ei* $< A >$ *cu produsul unităţilor fundamentale ridicate tot la aceleaşi puteri.*

Desfacerea în două a relaţiei (3) poate fi realizată însă şi sub forma

$$\{A\} = \{l\}^a \{m\}^b \{t\}^c \quad \text{şi} \quad < A >= k(< l >)^a (< m >)^b (< t >)^c , \tag{6}$$

astfel că acum *valoarea numerică* $\{A\}$ *a mărimii derivate* A *este egală cu produsul puterilor valorilor numerice ale mărimilor fundamentale, iar unitatea ei* $< A >$ *cu produsul dintre o constantă adimensională* k *şi puterile unităţilor fundamentale*.

Evident, din punct de vedere matematic, cele două procedee de desfacere sunt absolut identice. Problema care se pune este: în care relaţie e mai bine să figureze constanta adimensională k, în cea cu valori numerice sau în cea între unităţi? Răspunsul la această întrebare nu este unul categoric. Din considerente de ordin practic, acest coeficient trece, de obicei, în relaţia dintre valorile numerice, relaţia între unităţi rămânând astfel fără coeficient. În acest caz, unităţile formate sunt *coerente*, nefiind legate prin coeficienţi numerici paraziţi.

Pentru a înţelege mai bine cele spuse, în continuare se examinează următorul exemplu. După cum se ştie, formula ariei unui cerc este $A = \pi r^2$. De obicei, această relaţie se desface în două sub forma $\{A\} = \pi\{r\}^2$ şi $< A >=< r >^2$. Se observă că numărul transcendent π figurează în relaţia între valorile numerice şi nu în cea între unităţi. Se poate observa cu uşurinţă că, în acest caz, unitatea în care se exprimă raza r nu este afectată de constanta adimensională π şi prin urmare, unitatea ei metrul este o unitate coerentă. Dar există situaţii când coeficientul numeric π figurează în relaţia dintre unităţi, adică $\{A\} = \{r\}^2$ şi $< A >= \pi < r >^2$. În acest de-al doilea caz, se obţine o nouă unitate de arie, numită metrul circular, care este legată de unitatea metru pătrat prin relaţia $1\ \mathrm{m}_c = \pi\ \mathrm{m}^2$. Spre deosebire de unitatea metru pătrat, unitatea metru circular nu mai este coerentă.

4. Conversiunea unităţilor

În ştiinţă şi tehnică, educaţie şi învăţământ, precum şi în alte sectoare de activitate, pe lângă unităţi SI, se mai folosesc unităţi care nu fac parte din acest sistem, cum sunt, bunăoară, unităţile CGS, MKS, MKfS şi FPS. În acest caz, se impune ca absolută necesitate trecerea de la un sistem de unităţi la alt sistem.

Pentru a stabili modalitatea de conversiune a unităţilor mărimilor fizice dintr-un sistem de unităţi în alt sistem, se pleacă de la conceptul matematic al mărimii fizice [3, 4, 6, 7]: *valoarea unei mărimi fizice oarecare* A *se exprimă prin produsul dintre unitatea* $< A >$ *şi valoarea numerică* $\{A\}$ *ale mărimii fizice considerate*. Dacă mărimea fizică respectivă este o mărime din mecanică şi se mai ţine seama de relaţia (5) de aproximare a unităţilor derivate, se poate scrie

$$A = \{A\} \cdot < A > = \{A\} \cdot < l >^{a} \cdot < m >^{b} \cdot < t >^{c} . \tag{7}$$

La trecerea de la un sistem de unităţi la alt sistem se modifică valoarea numerică a mărimii fizice, nu şi valoarea ei [3, 4, 6, 7]. Prin urmare, aceeaşi mărime fizică A se poate exprima prin unităţile fundamentale $< l_1 >,\ < m_1 >,\ < t_1 >$ ale altui sistem, aplicând relaţia

$$A = \{A_1\} \cdot < A_1 > = \{A_1\} \cdot < l_1 >^{a} \cdot < m_1 >^{b} \cdot < t_1 >^{c} , \tag{8}$$

Prin identificare, rezultă

$$\{A\} \cdot < l >^{a} \cdot < m >^{b} \cdot < t >^{c} = \{A_1\} \cdot < l_1 >^{a} \cdot < m_1 >^{b} \cdot < t_1 >^{c} ,$$

din care se obţine

$$\{A_1\} = \{A\} \cdot \left(\frac{< l >}{< l_1 >} \right)^{a} \cdot \left(\frac{< m >}{< m_1 >} \right)^{b} \cdot \left(\frac{< t >}{< t_1 >} \right)^{c} . \tag{9}$$

Astfel se constată că *pentru a se trece de la valoarea numerică a unei mărimi exprimată într-un anumit sistem de unităţi la valoarea ei exprimată în alt sistem, este necesar să se înmulţească valoarea iniţială cu produsul factorilor de conversiune ai unităţilor fundamentale ridicaţi fiecare la puterea exponentului de dimensiune corespunzător*. În mod analog se convertesc unităţile altor domenii (căldurii, electricităţii etc.).

Fie că se cere să se exprime în unităţi SI viteza de deplasare a unui ciclist, care în sistemul FPS este egală cu 30 ft/s. Pentru soluţionarea acestei probleme, se face apel la relaţia de definiţie a vitezei în mişcarea rectilinie şi uniformă

$$v = l \cdot t^{-1} , \tag{10}$$

în care exponenţii dimensionali a, b şi c ai mărimilor fundamentale lungime, masă şi timp au valorile $a = 1,\ b = 0,\ c = -1$. În acest caz, relaţia dintre valorile numerice şi unităţile fundamentale ale vitezei ciclistului în cele două sisteme are forma

$$\{v_{SI}\} = \{v_{FPS}\} \cdot \frac{< l_{FPS} >}{< l_{\mathrm{SI}} >} \cdot \left(\frac{< t_{FPS} >}{< t_{\mathrm{SI}} >} \right)^{-1} . \tag{11}$$

Făcând substituţiile de rigoare, rezultă

$$\{v_{SI}\} = 25 \cdot \left(\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{m}} \right) \cdot \left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \right)^{-1} = 25 \cdot 0{,}3048 \cdot 1 = 7{,}62\ \mathrm{m/s} ,$$

rezultat care poate fi obţinut şi prin metoda directă, înlocuind inităţile anglo-saxone prin echivalenţii metrici corespunzători.

5. CONCLUZII

În urma extinderii primei teoreme de aproximare a lui Weierstrass asupra unităţilor mărimilor fizice se pot trage următoarele concluzii:

1. O mărime derivată oarecare se exprimă în funcţie de mărimile fundamentale printr-o relaţie de tip monom numai dacă valoarea numerică a mărimii derivate şi unitatea ei reprezintă monoame de acelaşi tip.

2. Pentru ca un sistem de unităţi să fie coerent este necesar ca factorul de proporţionalitate k care figurează în monomul unităţilor fundamentale ale acelui sistem să aibă valoarea $k = 1$.

3. Pentru a se trece de la valoarea numerică a unei mărimi exprimată într-un anumit sistem de unităţi la valoarea exprimată în alt sistem, trebuie să se înmulţească valoarea iniţială cu produsul factorilor de conversiune ai unităţilor fundamentale ridicaţi fiecare la puterea exponentului de dimensiune corespunzător.

BIBLIOGRAFIE

1. Barenblatt, G. I. *Dimensional analysis*. – New York: Gordon and Breach Science Publisher, 1987.– 135 p.
2. Bridgman, P. W. *Dimensional analysis* (the first edition appeared in 1922). – New York: AMS Press, 1978. – 120 p.
3. Cernica, I. M. *Bazele fizice ale analizei dimensionale: aplicaţii şi sisteme de unităţi*. – Bucureşti: Editura AGIR, 2014. – 216 p.
4. Ionescu, D. Gh. *Introducere în mecanica fluidelor*, ediţia a II-a. – Bucureşti: Editura Tehnică, 2005. – 594 p.
5. Корн, Г., Корн, Т. *Справочник по математике. Для научных работников и инженеров.* – Москва: Наука, 1973. – 832 с.
6. Milea, A. *În lumea măsurărilor şi a unităţilor de măsură*. – Bucureşti: Editura AGIR, 2008. – 268 p.
7. Sonin, A. A. *The physical basis of dimensional analysis*, second edition. – Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, MA 02139, 2001. – 55 p.
8. Staicu, C. I. *Analiza dimensională generală*. – Bucureşti: Editura Tehnică, 1976. – 206 p.
9. Vasilescu, Al. A. *Analiza dimensională şi teoria similitudinii*. – Bucureşti: Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1969. – 210 p.