



Digitally signed by
Technical Scientific
Library, TUM
Reason: I attest to the
accuracy and integrity of
this document

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

**FACULTATEA CALCULATOARE, INFORMATICĂ
ȘI MICROELECTRONICĂ**

**DEPARTAMENTUL INGINERIE SOFTWARE
ȘI AUTOMATICĂ**

Bartolomeu IZVOREANU

**SISTEME AUTOMATE NELINIARE
DISCRETE ȘI STOCASTICE**

MANUAL

**Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”**

2023

CZU 681.5(075.8)

I-99

Manualul a fost discutat și aprobat pentru editare la Senatul Universității Tehnice a Moldovei, proces-verbal nr. 1 din 26.09.2023.

Manualul *Sisteme automate neliniare discrete și stocastice* este destinat studenților care studiază programul *Automatică și informatică*. În lucrare sunt expuse principiile și metodele teoriei sistemelor automate neliniare, discrete și stocastice cu expunerea modelelor matematice ale elementelor și sistemelor neliniare și discrete cu parametri concentrați ai transferului intrare–ieșire: ecuații diferențiale, ecuații cu diferențe finite, funcții temporale, funcții de transfer, funcții frecvențiale și modele intrare–stare–ieșire, analiza stabilității și performanțelor sistemului la acțiunea semnalelor deterministe; sisteme liniare și neliniare cu parametri concentrați supuse acțiunii semnalelor stocastice: modele de semnale stocastice, analiza transformării semnalelor stocastice de elemente liniare și neliniare, analiza dinamicii sistemelor automate liniare și neliniare la acțiunea semnalelor stocastice. Sunt date exemple de calcul, formulate întrebări și propuse probleme de rezolvat.

Manualul include 12 capitole, bibliografie și 3 anexe.

Autor: conf. univ., dr. șt. tehn. Bartolomeu IZVOREANU

Recenzenți: acad., conf. univ., dr. hab. Anatolii BALABANOV

prof. univ., dr. șt. fiz.-mat. Vasile MORARU

prof. univ., dr. ing. Gheorghe CĂPĂȚĂNĂ

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN RM

Izvoreanu, Bartolomeu.

Sisteme automate neliniare discrete și stocastice: manual / Bartolomeu Izvoreanu; Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Departamentul Inginerie Software și Automatică.

– Chișinău: Tehnica-UTM, 2023. – 360, [1] p.: fig., tab.

Bibliogr.: p. 354-355 (21 tit.). – 50 ex.

ISBN 978-9975-45-977-8

© UTM, 2023

CUPRINS

INTRODUCERE.....	9
1 SISTEME AUTOMATE NELINIARE	12
1.1 Introducere.....	12
1.2 Particularitățile sistemelor automate neliniare	13
1.3 Tipuri de neliniarități.....	14
1.4 Scheme structurale ale sistemelor automate neliniare	18
1.5 Modele matematice ale sistemelor automate neliniare	21
1.6 Punct de echilibru al sistemului automat neliniar.....	27
Chestionar și probleme	31
2 METODA PLANULUI FAZELOR	32
2.1 Analiza sistemului neliniar prin metoda planului fazelor.....	32
2.2 Puncte singulare pentru sistemul liniar în planul fazelor	36
2.3 Sisteme neliniare cu neliniarități de tip releu	41
2.4 Portretul de fază în cazuri particulare de sisteme neliniare	45
2.5 Cicluri-limită în planul fazelor	46
2.6. Construirea traiectoriilor de fază ale sistemului automat	48
2.7 Sistemul automat neliniar cu regim alunecător	52
2.8 Sisteme automate neliniare cu structură variabilă	62
Chestionar și probleme	67
3 METODA FUNCȚIEI DE DESCRIERE	68
3.1 Introducere	68
3.2 Principiul metodei	68
3.3 Determinarea oscilațiilor întreținute ale sistemului cu o neliniaritate.....	77
3.3.1 <i>Cazul oscilațiilor simetrice</i>	78
3.3.2 <i>Cazul oscilațiilor nesimetrice</i>	78
3.4 Determinarea autooscilațiilor sistemului neliniar.....	80

3.4.1	<i>Generalități</i>	80
3.4.2	<i>Metoda planului Mihailov</i>	81
3.4.3	<i>Metoda planului Nyquist</i>	89
3.5	Oscilații forțate	93
3.6	Metoda liniarizării vibratorii	96
	Chestionar și probleme	101
4	STABILITATEA SISTEMELOR	
	AUTOMATE NELINIARE	102
4.1	Noțiuni de stabilitate a sistemului neliniar	102
4.2	Metoda directă Liapunov	105
4.3	Metoda ecuației matriceale Liapunov	108
4.4	Forme pătratice	111
4.5	Stabilitatea absolută a sistemelor automate neliniare	113
4.6	Problema lui Lurie	115
4.7	Criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută	121
4.8	Criteriul Popov în cazul părții liniare neutră sau instabilă.....	125
4.9	Criteriul cercului de stabilitate absolută	128
4.10	Stabilitatea absolută a răspunsului sistemului neliniar	129
4.11	Performanțele sistemului automat neliniar	132
4.11.1	<i>Formularea problemei</i>	132
4.11.2	<i>Performanțele sistemului automat neliniar</i>	133
	Chestionar și probleme	135
5	SISTEME AUTOMATE DISCRETE	136
5.1	Introducere	136
5.2	Discretizarea și modulația semnalelor	136
5.3	Schema funcțională și structurală a sistemului automat discret	140
5.4	Modele matematice ale sistemelor automate discrete	142
5.4.1	<i>Funcții discrete și ecuații cu diferențe finite</i> ...	142
5.4.2	<i>Modelul matematic al elementului</i>	

<i>ideal de discretizare</i>	149
5.4.3 <i>Funcția frecvențială a elementului</i>	
<i>ideal de discretizare</i>	152
5.4.4 <i>Modelul matematic al elementului de reținere</i>	152
5.5 Transformarea z discretă	157
5.5.1 <i>Proprietățile de bază ale transformatei</i>	
<i>z directe</i>	158
5.5.2 <i>Proprietățile transformatei z inverse</i>	163
5.6 Ecuțiile și funcțiile de transfer ale	
sistemului deschis cu eșantionare	166
5.7 Scheme structurale și funcțiile de transfer	
ale sistemului închis cu eșantionare	174
5.8 Transformata z de la conexiunile de elemente	
discrete și continue	179
5.9 Funcții frecvențiale ale sistemului	
automat cu eșantionare	186
5.10 Modele intrare-stare-ieșire ale sistemelor	
automate cu eșantionare	190
Chestionar și probleme	197
6 STABILITATEA SISTEMELOR	
AUTOMATE CU EȘANTIONARE	199
6.1 Conceptul de stabilitate	199
6.2 Criterii de stabilitate	203
6.2.1 <i>Criteriul de stabilitate Shur-Cohn</i>	203
6.2.2 <i>Criteriul de stabilitate Hurwitz</i>	204
6.3 Criterii frecvențiale de apreciere a	
stabilității sistemului cu eșantionare.....	207
6.3.1 <i>Criteriul de stabilitate Mihailov</i>	207
6.3.2 <i>Criteriul de stabilitate Nyquist</i>	209
6.4 Influența perioadei de eșantionare asupra	
stabilității sistemului	210
Chestionar și probleme	212
7 PERFORMANȚELE SISTEMELOR AUTOMATE	
CU EȘANTIONARE	213
7.1 Ecuția răspunsului sistemului cu eșantionare	213

7.2	Aprecierea erorii regimului staționar	223
7.3	Coefficienții erorii sistemului în regim staționar	226
7.4	Construirea răspunsului indicial al sistemului cu eșantionare.....	229
7.5	Aprecierea performanțelor răspunsului indicial al sistemului cu eșantionare.....	237
7.6	Elemente de corecție în sisteme discrete.....	238
	Chestionar și probleme.....	239
8	SISTEME AUTOMATE NUMERICE	241
8.1	Schema funcțională și structurală a sistemului numeric	241
8.2	Modelul matematic al sistemului numeric	243
	Chestionar și probleme	247
9	SEMNALE STOCASTICE ÎN SISTEME AUTOMATE	248
9.1	Introducere	248
9.2	Procese stocastice și caracteristicile lor	249
9.3	Procese stocastice staționale	257
9.4	Procese stocastice ergodice	259
9.5	Proprietățile funcției de corelație	264
9.6	Densitatea spectrală și legătura funcțională cu funcția de corelație	267
9.7	Modele de semnale stocastice și caracteristicile lor	272
	Chestionar și probleme	277
10	ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE	279
10.1	Introducere	279
10.2	Transformarea semnalului stocastic de elementul liniar	279
10.3	Obiecte de conducere la acțiunea semnalelor stocastice.....	287
10.4	Sistemul automat liniar închis la acțiunea semnalelor stocastice	290
10.5	Metode de calcul al dispersiei	

semnalului stocastic	293
10.5.1 Metode analitice de calcul a dispersiei semnalului stocastic	293
10.5.2 Metode grafo-analitice	298
10.6 Utilizarea semnalului zgomot alb ideal ca model al acțiunilor externe.....	299
10.7 Calculul dispersiei erorii sistemului de ordin arbitrar	304
10.7.1 Calculul preciziei transformării semnalelor stocastice staționare în regim staționar.....	304
10.7.2 Calculul dispersiei erorii în sistem de ordinul unu	306
10.7.3 Calculul dispersiei erorii în sistem de ordinul doi	308
10.7.4 Calculul dispersiei erorii în sistem de ordinul trei	313
Chestionar și probleme	316
11 SINTEZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE ...	317
11.1 Formularea problemei	317
11.2 Sinteza sistemului automat optimal cu structură fixă	320
11.3 Sinteza sistemului automat optimal cu structură arbitrară	324
11.4 Sinteza sistemului optimal în spațiul stărilor (filtrul Kalman-Busy).....	331
Chestionar și probleme.....	336
12 SISTEME NELINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE	337
12.1 Transformarea semnalului stocastic de elementul neliniar	337
12.2 Liniarizarea statistică a elementului neliniar	340
12.3 Analiza sistemelor neliniare prin metoda liniarizării statistice	346
Chestionar și probleme	353

BIBLIOGRAFIE	354
ANEXE	356
Anexa 1. Tipuri de neliniarități	356
Anexa 2. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s și transformata z ..	358
Anexa 3. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s și transformata z ...	359

INTRODUCERE

În structura unui sistem automat real există diverse elemente funcționale de diversă natură fizică și prin descrierea funcționării acestora se obțin relații neliniare [1, 4, 9, 12, 13, 17, 18].

Istoric, evoluția automatizării a început cu dezvoltarea Teoriei sistemelor automate – sisteme liniare în timp continuu cu parametri constanți la acțiunea semnalelor deterministe, pentru care s-au elaborat metode eficiente de analiză și sinteză bazate pe teoria ecuațiilor diferențiale liniare, transformata Laplace și metode frecvențiale reprezentate ca modele matematice intrare–ieșire. Modelele liniare se obțin prin proceduri de aproximare a caracteristicilor de funcționare a elementelor și sistemului integral și aceste modele se soluționează.

În anii '70 ai secolului al XX-lea s-au dezvoltat intens metodele moderne de analiză și sinteză a sistemelor automate liniare în baza formalismului modelelor matematice intrare–stare–ieșire (spațiul stărilor), care au condiționat o nouă viziune a evoluției sistemelor de conducere și eficientizarea funcționării acestora.

Însă nu pentru toate elementele funcționale reale ale sistemului automat neliniar se pot obține aproximări cu modele liniare și atunci aceste elemente se descriu prin relații neliniare (ecuații diferențiale neliniare, caracteristici statice neliniare etc.). Soluționarea ecuațiilor diferențiale neliniare de ordin mai mare decât doi este dificilă și atunci fiecare tip de ecuație neliniară se studiază separat. În multe cazuri, relațiile neliniare ale elementelor nu pot fi reprezentate ca modele matematice și aceste relații se dau în formă grafică (caracteristici statice releice, histerezis etc.).

Deoarece principiul superpoziției nu este aplicabil sistemelor neliniare, rezultă că nici determinarea componentelor liberă și permanentă nu are sens, deoarece semnalul nu se descompune în componente care pot fi analizate separat, dar se analizează integral.

Din aceste considerente, modelele matematice ale sistemelor neliniare nu pot fi generalizate, iar modelul sistemului neliniar se analizează ca model particular, în funcție de neliniaritățile componente ale sistemului automat.

Astfel, soluționarea modelelor matematice neliniare devine o

problemă dificilă, însă realizarea practică a sistemului poate fi mai simplă, având unele avantaje.

Problema de analiză a sistemului neliniar constă în construirea modelului matematic al sistemului și studiarea lui pentru a determina dependența proprietăților modelului de variația valorilor parametrilor și posibila alegere a unui regim favorabil de funcționare a sistemului.

În problema de sinteză a sistemului neliniar, pornind de la cerințele de funcționare a sistemului, se determină structura, componența și valorile parametrilor elementelor sistemului.

Pentru analiza și sinteza calitativă a regimurilor de funcționare a sistemelor automate neliniare s-au dezvoltat mai multe clase de metode (spațiul fazelor, metoda Leapunov, metoda funcției de descriere, criteriul de stabilitate absolută, metoda liniarizării vibratorii etc.), care permit a construi sisteme eficiente pentru automatizarea diverselor procese industriale și tehnologice.

Sistemele menționate sunt sisteme continue (în timp continuu) sau analogice, când la intrările și ieșirile elementelor, semnalele lor pot apărea în orice moment de timp. Dar de aici nu rezultă că aceste clase de sisteme sunt cele mai eficiente din punct de vedere tehnico-economic.

În practică se realizează și sisteme discrete, în care semnalele elementelor pot fi discretizate în nivel și timp [1, 4, 9, 12, 13, 17].

Sistemele discrete și numerice se deosebesc de sistemele continue prin faptul că în unul sau mai multe elemente funcționale ale sistemului automat, semnalele la intrare și/sau la ieșire reprezintă o succesiune de impulsuri sau un cod în momentele discrete de timp, deplasate la intervale de timp (de exemplu egale).

În literatura de specialitate se utilizează frecvent termenii *sistem cu eșantionare*, *sistem discret*, *sistem cu timp discret* și *sisteme numerice*.

Corect este considerat termenul *sistem cu eșantionare*, când unul dintre parametrii informaționali ai impulsului (amplitudinea, durata, faza) se modulează (se modifică) în timp. Termenul *sisteme numerice* se referă la sisteme, în care semnalul discret în formă de cod este generat de un calculator sau de elemente numerice. În cazul când

în structura sistemului există elemente cu eșantionare, cât și elemente numerice, sistemul se numește *sistem discret*.

Modelele matematice ale sistemelor cu eșantionare și numerice se descriu prin ecuații cu diferențe finite, care sunt un analog al ecuației diferențiale pentru sistemul liniar continuu. Soluționarea ecuațiilor cu diferențe este dificilă și aceasta se transformă în ecuații recurente, care se soluționează simplu, dar cu recurență pentru intervalul de timp al răspunsul sistemului.

S-au dezvoltat metode de analiză și sinteză ale sistemelor cu eșantionare și numerice. În practică, sistemele discrete se construiesc în baza unor elemente funcționale simple, care reduc costurile și ridică fiabilitatea sistemului.

Clasele de sisteme liniare, neliniare și discrete se analizează la acțiunea semnalelor externe bine determinate. Această formulare a problemei corespunde informației complexe despre sistemul studiat.

Însă, în practică, asupra sistemului automat acționează semnale interioare și exterioare a căror evoluție nu este cunoscută cu certitudine, care deteriorează regimul de funcționare a sistemului. Pentru depășirea acestor dificultăți se aplică teoria probabilităților privind descrierea fenomenelor probabiliste (ca procese stocastice) care acționează asupra sistemului și aceste acțiuni se consideră funcții probabiliste sau stocastice [9, 12, 17-19].

Dacă procesele stocastice sunt staționare, atunci ansamblul de realizări ale procesului stocastic se substituie cu o realizare a procesului în domeniul timpului în baza ipotezei ergodice, ceea ce simplifică soluționarea problemelor de analiză și sinteză a sistemului automat.

Un proces stocastic se caracterizează prin funcția de distribuție și densitatea distribuției, care sunt larg utilizate la studierea sistemelor neliniare.

Pe parcurs s-au elaborat metode de analiză și sinteză a sistemelor automate liniare continue, neliniare, cu eșantionare și neliniare-discrete la acțiunea semnalelor stocastice în domeniul timpului – funcțiile de corelație – și în domeniul frecvență – funcțiile spectrale [9, 12, 17-19]. Pentru analiza și sinteza sistemelor automate neliniare s-a elaborat metoda liniarizării statistice.

BIBLIOGRAFIE

1. *Automatica* / I. DUMITRACHE. București: Ed. Academiei Române, 2009. V.1, 961 p. ISBN 978-973-1883-4.
2. DYNNIKOV, A.I. *Tzifrovye sistemy upravleniia*. M.: MFTI, 2006, 96 s. ISBN 5-7417-0151-5.
3. DORF, R. K.; BISHOP, R. X. *Sovremennyye sistemy upravleniia (Modern Control Systems)*. Moskva: Laboratoria Bazovykh Znaniia, 2004, 832 s. ISBN 5-93208-119-8.
4. GAIDUK, A. R. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Uchebnik*. M.: Vysshiaia shkola, 2010, 415 s. ISBN 978-5-06-006055-3.
5. IZVOREANU, B. *Teoria sistemelor automate. Manual*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2022, 349 p. ISBN 978-9975-45-853-5.
6. IZVOREANU, B. *Teoria sistemelor automate 2. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2021, 110 p. ISBN 978-9975-45-738-5.
7. IZVOREANU, B. *Ingineria sistemelor automate. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2021, 122 p. ISBN 978-9975-45-737-8.
8. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. T. 1. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2003, 288 c. ISBN 5-9221-0379-2.
9. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. T. 2. Mnogomernyye, nelineinye, optimalinye i adaptivnyye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2004, 464 s. ISBN 5-9221-0534-5.
10. KIM, D.P; DIMITRIEVA, N.D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravleniia. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2007, 168 c. ISBN 978-5-9221-0873-7.
11. KUO, B. *Teoria i proektirovanie tzyfrovyyh sistem upravleniia*. M.: Mashinostroenie, 1986, 448 s.
12. LUKAS, V.A. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Uchebnik dlea vuzov*. M.: Nedra, 1990. 416 s. ISBN 5-247-01027-2.
13. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniia. T. 1. Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravleniia* / Pod red. K.A. PUPKOVA; N.D. EGUPOVA. M.: Izd-stvo

MGTU im. N.E. Baumana, 2004, 656 c. ISBN 5-7038-2189-4.

14. PANTELEEV, A.V.; BORTAKOVSKII, A.S. *Teoria upravleniia v primerakh i zadachakh*. M.: Vysshiaia shkola, 2003, 583 s. ISBN 5-06-004136-0.

15. POPOV, E.P. *Prikladnaia teorii protsessov upravleniia v nelineinykh sistemakh*. M.: Nauka, 1973, 584 s.

16. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo regulirovaniia i upravleniia* / Pod red. V. A. BESEKERSKOGO. M.: Nauka, 1978, 512 s.

17. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Uchebnik dlia vuzov* / Pod red. V.B. IAKOVLEVA. M.: Vysshiaia shkola, 2005, 567 s. ISBN 5-06-004096-8.

18. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Nelineinye sistemy upravleniia pri sluchainykh vozdeistviiakh*. Uchebnik dlia vuzov / Pod red. A.V. NETUŠHILA. M.: Vysshiaia shkola, 1983, 432 s.

19. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Uchebnik dlia vuzov* / Pod red. A.V. VORONOVA. M.: Vysshiaia shkola, 1986, Ch. 2, 432 s.

20. TOPCHEEV, Iu. I.; TZYPLEAKOV, A.P. *Zadachnik po teorii avtomaticheskogo regulirovaniia*. M.: Mashinostroenie, 1977, 592 s.

21. VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iași: Editura Dosoitei, 1998, 238 p. ISBN 973-9135-60-9.