

# ANALIZA METODELOR DE ACORDARE A REGULATORULUI LA MODELE DE OBIECTE CU DUBLU ASTATISM ȘI ÎNTÂRZIERE DE ORDINUL UNU

Iulia BERGHII

Departamentul Ingineria Software și Automatică, grupa AI-201, Facultatea Calculatoare Informatică și  
Microelectronică, UTM, Chișinău, Republica Moldova, [iulia.berghii@isa.utm.md](mailto:iulia.berghii@isa.utm.md)

Coordonatorul științific **Bartolomeu IZVOREANU**, dr. șt. tehn., conf. univ.  
Departamentul Ingineria Software și Automatică, Facultatea Calculatoare Informatică și Microelectronică  
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova, [bartolomeu.izvoreanu@ati.utm.md](mailto:bartolomeu.izvoreanu@ati.utm.md)

**Rezumat:** În lucrare se analizează metodele de acordare a regulatorului la modelul obiectului de reglare cu dublu astatism și întârziere de ordinul unu cu parametrii cunoscuți după metoda poli-zero-uri, metoda polinomială și metoda gradului de stabilitate. Pentru metoda poli-zero-uri și metoda polinomială se impun performanțele sistemului suprareglarea și timpul de reglare și se construiește polinomul caracteristic al sistemului închis, după care se sintetizează algoritmul de reglare. Pentru metoda gradului de stabilitate, din ecuația caracteristică a sistemului închis, prin operații de derivare pe variabila necunoscută a gradului de stabilitate, se obțin funcții analitice ale parametrilor reguletoarelor PD și PID ca funcții neliniare de gradul de stabilitate și liniare de parametrii modelului obiectului. S-a examinat un exemplu și s-au variat parametrii modelului obiectului și s-a verificat robustețea sistemului. S-a verificat dinamica sistemului la acțiunea semnalului treaptă unitară. Se evidențiază avantajele și dezavantajele metodelor de acordare.

**Cuvinte cheie:** funcție de transfer, regulator, parametrii de acord, sistem automat, metode de acordare, acordarea regulatorului, răspunsul sistemului, performanțele sistemului.

## Introducere

Există o varietate de obiecte tehnice (automobilul, aparatul cosmic (satelit etc.), racheta, telescopul, plotterul, laserul, liftul, electroful reactorului nuclear, acționări liniare etc.) și procese tehnologice, care se descriu cu modele matematice cu dublu astatism și întârziere de ordinul unu cu funcția de transfer (f.d.t.) de forma [1]:

$$H(s) = \frac{k}{s^2(s+p)} = \frac{k}{s^3+ps^2} = \frac{b_0}{a_0s^3+a_1s^2} \quad (1)$$

unde  $k$  este coeficientul de transfer,  $p = 1/T$  - polul,  $T$  - constanta de timp, iar  $b_0 = k$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = p$  sunt coeficienții generalizați.

Prezența în Ec. (1) a astatismului de gradul doi ridică probleme dificile la acordarea regulatorului la aceste modele. Metodele larg utilizate la acordarea reguletoarelor ca metoda Ziegler-Nichols, metoda frecvențială etc. nu pot fi aplicate sau sunt dificile [1-3].

În lucrare se utilizează metodele poli-zero-uri (PZ), polinomială (MP) și gradului maximal de stabilitate (GMS) în forma analitică și cu iterații la acordarea regulatorului la modelul Ec. (1) și analiza performanțelor sistemului automat.

## Algoritmii de sinteză a regulatorului

În studiu se utilizează schema bloc structurală a sistemului automat (SA) alcătuită din regulator cu f.d.t.  $H_R(s)$  și modelul obiectului cu f.d.t.  $H(s)$ .

Metoda alocării poli-zero-uri (PZ) este o metodă analitică, care se utilizează pentru sinteza algoritmului de reglare, pornind de la performanțele impuse sistemului suprareglarea  $\sigma$  și

timpul de reglare  $t_r$ , se determină polii dominanți  $s_1, s_2$ . În continuare, se construiește polinomul caracteristic dorit  $P_d$  al sistemului închis cu cei doi poli dominanți și cu poli suplimentari alocați pe semiaxa reală negativă cât mai departe de polii dominanți pentru a satisface condițiile de realizabilitate fizică a regulatorului. Polinomul caracteristic  $P_c$  al sistemului cu modelul obiectului și regulatorul proiectat se egalează cu polinomul dorit  $P_d$  și prin egalarea coeficienților de pe lângă aceleași puteri ale lui  $s$  din ambele părți ale egalității, se construiește un sistem de ecuații algebrice, din care se calculează parametrii regulatorului [2].

*Metoda polinomială (MP).* Conform metodei polinomiale f.d.t. a modelului obiectului de ordinul  $n = 3$  se descrie în forma [3]:

$$H(s) = \frac{b_0}{a_3s^3 + a_2s^2} = \frac{b_0}{s^2(a_3s + a_2)} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)}, \quad (2)$$

$$\text{unde } B^-(s) = b_0 = k, B^+(s) = 1, A^-(s) = a_0s + a_1, A^+(s) = s^2.$$

Funcția de transfer a regulatorului sintetizat se descrie în forma:

$$H_R(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)s^r} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (3)$$

unde polinoamele necunoscute  $M(s)$  și  $N(s)$  se determină din ecuația polinomială de forma:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s)s^r = P_d(s), \quad (4)$$

unde  $s^r$  este astatism de gradul  $r$ .

Polinomul caracteristic dorit  $P_d(s)$  se construiește în baza modelului obiectului Ec. (1) și performanțele impuse sistemului suprareglarea și timpul de reglare.

*Metoda GMS.* Se utilizează algoritmi PD și PID, care se descriu cu funcțiile de transfer cu parametrii  $k_p, k_i, k_d$ :

$$H_{PD}(s) = k_p + k_d s, \quad (7)$$

$$H_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}, \quad (8)$$

Conform metodei GMS se obțin expresiile analitice de calcul ai parametrilor regulatorului PD și PID în forma [4], [5]:

Pentru algoritmul PD se obțin expresiile:

$$-3a_0J + a_1 = 0, \quad (9)$$

$$k_d = \frac{1}{k}(-3a_0J^2 + 2a_1J) = \frac{a_1^2}{3ka_0} = f_d(J), \quad (10)$$

$$k_p = \frac{1}{k}(a_0J^3 - a_1J^2) + k_dJ = \frac{a_1^3}{27ka_0^2} = f_p(J). \quad (11)$$

Din Ec. (9) se determină gradul optimal de stabilitate  $J_{opt}$  și din Ec. (10)-(11) se calculează parametrii optimali  $k_p, k_d$  ai regulatorului PD.

Pentru algoritmul PID se obțin expresiile:

$$4a_0J - a_1 = 0, \quad (12)$$

$$k_d = \frac{1}{k}(-6a_0J^2 + 3a_1J) = \frac{3a_1^2}{8ka_0} = f_d(J), \quad (13)$$

$$k_p = \frac{1}{k}(4a_0J^3 - 3a_1J^2) + 2k_dJ = \frac{a_1^3}{16ka_0^2} = f_p(J), \quad (14)$$

$$k_i = \frac{1}{k}(-a_0J^4 + a_1J^3) - k_dJ^2 + k_pJ = \frac{a_1^4}{256ka_0^3} = f_i(J). \quad (15)$$

Din Ec. (12) se determină gradul optimal de stabilitate  $J_{opt}$  și după expresiile analitice Ec. (13)-(15) se calculează parametrii optimali  $k_p, k_i, k_d$ .

În unele cazuri, pentru valorile optimale ale parametrilor  $k_p, k_i, k_d$  regulatorului PD și PID obținute, performanțele sistemului automat nu sunt satisfăcute. În aceste cazuri se propune de a varia gradul  $J$  și se calculează și se construiesc curbele pentru regulatorul PD  $k_p = f_p(J), k_d = f_d(J)$  Ec. (10)-(11) și curbele pentru regulatorul PID  $k_p = f_p(J), k_i = f_i(J), k_d = f_d(J)$  Ec. (13)-(15). Pe aceste curbe  $k_p = f_p(J), k_i = f_i(J), k_d = f_d(J)$  se aleg seturi de valori ai parametrilor regulatorului PD, PID  $J_i - k_{pi}, k_{ii}, k_{di}$  și se simulează pe calculator sistemul automat, se ridică răspunsul indicial al sistemului după care se determină performanțele cele mai ridicate posibile ale sistemului, care ar satisface performanțele impuse sistemului.

Pentru un exemplu de model al obiectului Ec. (1) se analizează acordarea regulatorului după metodele PZ, MP și GMS și se analizează performanțele și robustețea sistemului la acțiunile referinței și perturbației de tip treaptă și la variația cu  $\pm 50\%$  ai parametrilor  $k$  și  $T$ .

### Aplicații și simulare

Pentru analiza rezultatelor obținute la acordarea regulatorului la modelul obiectului Ec. (1) după metodele propuse se analizează un exemplu.

*Exemplu.* Se consideră modelul obiectului de reglare (1) de ordinul  $n = 3$  cu parametrii cunoscuți  $b_0 = k = 1, a_0 = 1, a_1 = p = 1/T = 10$  descris cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0}{a_0s^3 + a_1s^2} = \frac{1}{s^3 + 10s^2}.$$

Se cere: Pentru performanțele impuse sistemului suprareglarea  $\sigma \leq 10\%$  și timpul de reglare  $t_r \leq 2$  s să se acordeze regulatorul la modelul obiectului Ec. (1) după metodele PZ, MP și GMS în forma analitică și cu iterații. Modelul obiectului conține astatism și eroarea staționară a sistemului  $\varepsilon = 0$ , iar regulatorul proiectat va fi static.

*Soluționare. 1.* Metoda PZ. Se construiește polinomul caracteristic al sistemului  $P_c(s)$  și polinomul dorit  $P_d(s)$ , se egalează expresiile polinoamelor și se determină parametrii regulatorului PZ care are f.d.t.:

$$H_R(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_2s^2 + q_1s + q_0}{p_2s^2 + p_1s + p_0} = \frac{16516.909s^2 + 138912.57s + 308855.7}{s^2 + 84.001s + 2231.5291}. \quad (16)$$

2. *Metoda polinomială.* Conform metodei polinomiale se construiesc ecuațiile polinomiale:

1) se admit rădăcinile multiple (MP1) și se determină f.d.t. a regulatorului:

$$H_{R1}(s) = \frac{(a_0s + a_1)(m_0s + m_1)}{kn_0s + kn_1} = \frac{q_2s^2 + q_1s + q_0}{p_1s + p_0} = \frac{(s+10)(3s+1)}{s+3} = \frac{3s^2 + 31s + 10}{s+3} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (17)$$

2) se construiește polinomul caracteristic dorit  $P_{d2}$  (MP2) în baza celor doi poli dominanți și unul suplimentar MP2 și se determină parametrii regulatorului cu f.d.t.:

$$H_R(s) = \frac{(a_0s+a_1)(m_0s+m_1)}{kn_1s+kn_1} = \frac{q_2s^2+q_1s+q_0}{p_1s+p_0} = \frac{165.4701s^2+1997.874s+3431.73}{s+34.001} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (18)$$

3. *Metoda GMS*. Pentru algoritmul PDA din Ec. (8) se calculează gradul optimal  $J_{opt} = 3.3333$  și din Ec. (9)-(10) se determină parametrii optimali  $k_p = 37.037$ ,  $k_d = 33.3333$ .

Pentru algoritmul PIDA din Ec. (11) se determină gradul optimal  $J_{opt} = 2.5$  și după Ec. (12)-(14) se calculează valorile optime ale parametrilor  $k_p = 62.5$ ,  $k_i = 39.0625$ ,  $k_d = 37.5$ .

Prin operații cu iterații s-a variat gradul de stabilitate  $J$ , s-au calculat parametrii regulatorului PDI și PIDI, s-a simulat sistemul și după răspunsul indicial s-au determinat performanțele cele mai ridicate și sunt date în Tab. 1: rândul 5 pentru PDI și rândul 7 pentru PIDI.

Tabelul 1.

Parametrii regulatorului și performanțele sistemului automat

Nr. crt.	Metoda acordare	Parametrii regulatorului				Performanțele sistemului			
		$J$	$k_p$	$k_i$	$k_d, s$	$t_c, s$	$d, \%$	$t_r, s$	$n$
1	PZ					0.25	22.25	1.20	1
2	MP1					2.51	27.18	10.33	1
3	MP2					0.28	22.61	1.28	1
4	GMSA, PDA	3.333	37.037		33.33	0.49	25.50	1.94	1
5	GMSI, PDI	3.5	36.75		33.25	0.44	25.41	1.95	1
6	GMSA, PIDA	2.5	62.5	39.063	37.5	0.37	41.5	2.78	1
7	GMSI, PIDI	3.3	39.204	3.5482	33.66	0.43	27.42	1.97	1

S-a simulat pe calculator sistemul cu regulatorul acordat după metodele PZ, MP1, MP2 și metoda GMS cu regulatoarele PDI, PID și răspunsurile indiciale sunt date în figura 1: alura 1 – sistemul cu regulatorul PZ, alura 2 - sistemul cu regulatorul MP1, alura 3 - sistemul cu regulatorul MP2, alura 4 - sistemul cu regulatorul PDA, alura 7 - sistemul cu regulatorul PIDI, iar performanțele sistemelor sunt date în Tab. 1, rândul 1- sistemul cu regulatorul PZ, rândul 2 - sistemul cu regulatorul MP1, rândul 3 - sistemul cu regulatorul MP2, rândul 4 - sistemul cu regulatorul analitic PDA (GMSA), rândul 7 - sistemul cu regulatorul cu iterații PIDI (GMSI).

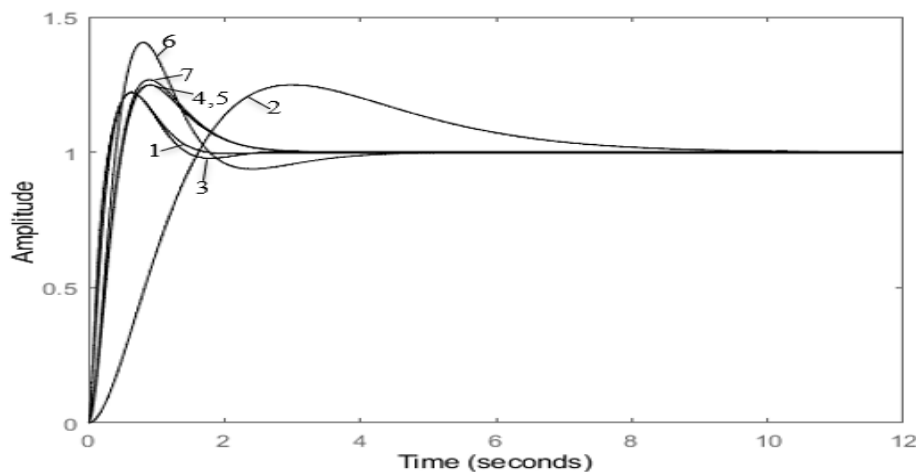


Figura 1. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat

### Concluzii

Analizând rezultatele obținute la acordarea regulatorului la modelul obiectului (1) după metodele PZ, PM2 GMS se constată:

- Sistemul cu regulatorul acordat după metodele PZ și MP2 au aceleași performanțe.
- Sistemul cu regulatorul PDI, PIDI acordat după metoda GMSI au aceleași performanțe.
- Sistemul cu regulatorul PDI, PIDI are performanțe mai reduse: timpul de creștere  $t_c$  mai mare de 1.76-1.72 ori, suprareglarea  $d$  mai mare de 1.14-1.23 ori, timpul de reglare  $t_r$  mai mare de 1.62-1.64 ori în comparație cu performanțele sistemului cu regulatorul PZ.
- Robustețea sistemului cu regulatorul PIDI ( $J = -0.294$ ) este mai ridicată de 13 ori ca a sistemului cu regulatorul PZ ( $J = 0.0226$ ), mai ridicată de 8 ori ca a sistemului cu regulatorul MP2 ( $J = 0.0354$ ) și mai ridicată de 1.7 ori ca a sistemului cu regulatorul PDA ( $J = 0.1713$ ).
- La variația concomitent a parametrilor modelului obiectului cu 50 % de la valorile nominale cel mai stabil este sistemul cu regulatorul PDA și PIDI.

### Bibliografie

- [1] R. Dorf, R. Bishop, *Sovremennye sistemy upravleniya*. M.: Laboratoria Bazovyh Znaniy, 2004, 832 s. ISBN 5-93208-119-8.
- [2] I. Dumitrache. *Ingineria reglării automate*. București: Politehnica Press, 2016. V. 1. 407 p. ISBN 978-606-515-686-9.
- [3] D.P. Kim, *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lineinye sistemy* M.: FIZMATLIT, 2003. 288 s. ISBN 5-9221-0379-2.
- [4] B. Izvoreanu, I. Fiodorov, M. Pisarenco, “Comparative Analysis of Regulators Tuning Methods to Models of Objects with Inertia”, *Buletinul Institutului Politehnic din Iași*, Tomul L (LIV), Fasc. 5A, Electrotehnică, Energetica, Electronica, 2004, pp. 63-68.
- [5] B. Izvoreanu, Irina Cojuhari, I. Fiodorov, D. Moraru, A. Secieru, “Tuning the PID Controller to the Model of Object with Inertia Second Order According to the Maximum Stability Degree Method with Iteration”, *Annals of the University of Craiova. Electrical Engineering series*, No. 43, Issue 1, 2019, pp. 79-85. ISSN-4805.