METODĂ ALTERNATIVĂ DE DEDUCERE A ECUAŢIILOR NAVIER-STOKES

Roman SPÂNU, Roman VLASOV

Universitatea Tehnică a Moldovei

***Rezumat**: Se prezintă o metodă alternativă de deducere a ecuaţiilor Navier-Stokes pentru mişcarea laminară a fluidelor vâscoase incompresibile, bazată pe legile fundamentale ale dinamicii clasice şi fizicii moleculare. Pentru transformarea integralei de suprafaţă în integrală de volum, se recurge la relaţia integrală a gradientului.*

***Cuvinte cheie**: fluid, vâscos, incompresibil, mişcare, element, forţă, rezistenţă, viscozitate, ecuaţie.*

Introducere

Mişcarea laminară a fluidelor vâscoase incompresibile este guvernată de ecuaţiile Navier-Stokes. Prima demonstraţie matematică a acestor ecuaţii a fost dată de matematicianul francez Claude-Louis-Marie-Henri Navier, în anul 1822, plecând dintr-un raţionament bazat nu atât pe acţiunea forţelor moleculare, cât pe ipoteze arbitrare [1]. Cu toate că a fost primul, care a completat ecuaţiile lui Euler din dinamica fluidelor ideale cu un termen care ia în vedere fenomenul de frecare internă, Navier nu a recunoscut semnificaţia fizică a viscozităţii, atribuindu-i coeficientului de viscozitate proprietăţile unei funcţii intermoleculare. Totuşi, nu ar trebui să fim prea exigenţi faţă de opera matematică a lui Navier, deoarece includerea fenomenului de frecare internă în ecuaţiile lui Euler părea o problemă dificilă chiar de la bun început, datorită faptului că aceste ecuaţii descriu fluxul de viteză macroscopic al fluidului, în timp ce disiparea energiei se produce la nivel microscopic. O demonstraţie asemănătoare a prezentat fizicianul francez Simon Denis Poisson, în 1829, dar ecuaţiile stabilite de el aveau să se deosebească de forma finală printr-un termen suplimentar ce conţine derivata presiunii. Între timp, matematicianul francez Augustin Louis Cauchy stabileşte ecuaţiile fundamentale ale mişcării mediilor continue în funcţie de tensiuni, care aveau să marcheze dezvoltarea dinamicii fluidelor vâscoase. Demonstraţia fenomenologică este axată pe ecuaţiile lui Cauchy şi a fost dată de fizicianul francez Adhemar Barré de Saint-Venant, în anul 1834, şi de fizicianul britanic de origine irlandeză George Gabriel Stokes, în anul 1845.

În cei aproape două sute de ani de cercetare în domeniul dinamicii fluidelor vâscoase, atenţia cercetătorilor s-a orientat nu atât asupra elaborării unor metode simple de deducere a ecuaţiilor Navier-Stokes, cât asupra rezolvării lor. Până în prezent literatura de specialitate nu oferă metode alternative de deducere a ecuaţiilor menţionate. Excepţie, în acest sens, face lucrarea [2], în care autorul stabileşte relaţia de calcul a forţei de rezistenţă – partea vulnerabilă a ecuaţiilor – pe baza primei teoreme a impulsului (teorema cantităţii de mişcare), simplificând astfel deducerea ecuaţiilor Navier-Stokes.

1. Formularea problemei

Deducerea ecuaţiilor de mişcare ale fluidelor vâscoase chiar şi pentru fluidul incompresibil – cazul mai idealizat şi mai simplu – întâmpină dificultăţi mari, mai ales de ordin matematic, motiv pentru care nu se predau studenţilor UTM. Metodele existente presupun aplicarea unor raţionamente matematice artificiale, lipsite de o semnificaţie fizică clară. Pentru elaborarea unei metode simple şi clare de deducere a ecuaţiilor Navier-Stokes, în condiţiile menţionate, s-a impus realizarea acestui studiu, bazat pe transpunerea principiului lui d´Alembert şi a legii frecării vâscoase a lui Newton pentru mişcarea unidirecţională.

2. Ecuaţiile de mişcare a fluidelor vâscoase incompresibile

Pentru determinarea formei generale a ecuaţiilor de mişcare a fluidelor vâscoase incompresibile, se consideră un fluid în mişcare laminară, din care se separă un element oarecare de fluid cu volumul ϑ, limitat de suprafaţa închisă σ (fig. 1). Studiul echilibrului dinamic al acestuia poate fi făcut prin solidificarea lui şi aplicarea principiului lui d´Alembert forţelor care acţionează asupra volumului ϑ

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_s + \vec{F}_\mu = 0, \tag{1}$$

care poate fi scris şi sub forma legii a doua a dinamicii clasice

$$m\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_s + \vec{F}_\mu, \tag{2}$$

unde $\vec{F}_i$, $\vec{F}_{ext}$, $\vec{F}_s$ şi $\vec{F}_\mu$ sunt respectiv forţa de inerţie, exterioară, superficială (de presiune) şi de rezistenţă cauzată de viscozitate, m – masa fluidului conţinut în elementul considerat, iar $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ – acceleraţia centrului de masă al acestui element. Se presupune că cele două ecuaţii vectoriale se respectă în orice punct al domeniului tridimensional ocupat de fluidul în mişcare.

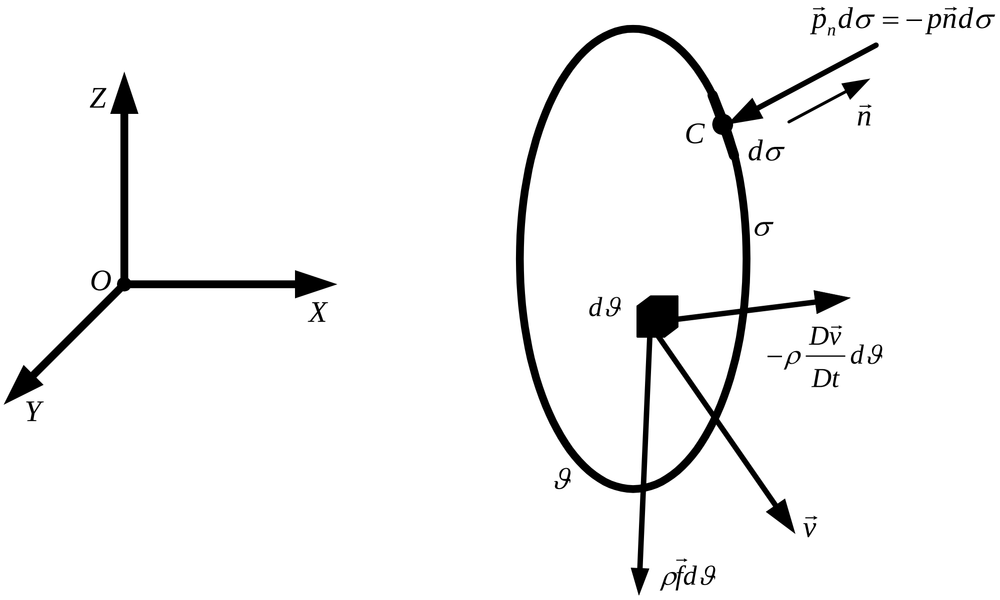

Figura 1. Element de fluid în mişcare, solicitat de forţe exterioare, superficiale şi de rezistenţă.

Prin suprimarea fluidului din exteriorul suprafeţei σ, este necesar să se înlocuiască acţiunea acestuia cu un sistem echivalent de forţe. Fie un element de suprafaţă de arie $d\sigma$, ca în figura 1. Pe acest element se exercită forţa de suprafaţă $d\vec{F}_s = \vec{p}_n d\sigma = -p\vec{n}d\sigma$, în care $\vec{p}_n$ este vectorul tensiune, p – presiunea hidrostatică, iar $\vec{n}$ – vectorul unitar al normalei pe elementul de suprafaţă dirijat către exterior. Se poate considera că această forţă elementară este aplicată în centrul de masă C al elementului de arie $d\sigma$. Pentru întreaga suprafaţă închisă σ, rezultanta forţelor de suprafaţă $\vec{F}_s$ are expresia

$$\vec{F}_s = \oiint_\sigma \vec{p}_n d\sigma = -\oiint_\sigma p\vec{n}d\sigma = -\iiint_\vartheta \nabla p d\vartheta, \tag{3}$$

unde pentru transformarea integralei pe suprafaţa închisă σ în integrală de volum s-a aplicat formula integrală a gradientului [3, 4].

Fie acum un element de volum $d\vartheta$ şi de masă $dm = \rho d\vartheta$ (fig. 1). Această masă se deplasează cu viteza $\vec{v}$ şi este supusă acţiunii unei forţe exterioare elementare $d\vec{F}_{ext} = \rho\vec{f}d\vartheta$, unde $\vec{f}\left(f_x,\ f_y,\ f_z\right)$ este vectorul de densitate al forţelor exterioare. Pentru întregul element de fluid de volum ϑ, forţa exterioară este

$$\vec{F}_{ext} = \iiint_\vartheta \rho\vec{f}d\vartheta. \tag{4}$$

Tot asupra elementului de volum $d\vartheta$ acţionează şi forţa de inerţie $d\vec{F}_i = -\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}d\vartheta$. Pentru întregul element fluid de volum ϑ, forţa de inerţie $\vec{F}_i$ este

$$\vec{F}_i = -\iiint_\vartheta \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}d\vartheta. \tag{5}$$

Pentru calculul forţei de rezistenţă la mişcarea laminară a fluidelor vâscoase incompresibile, se recurge la aplicarea legii frecării vâscoase a lui Newton unei particule fluide de forma unui paralelipiped elementar de dimensiuni dx, dy, dz. Pentru început, se examinează mişcarea unidirecţională în lungul axei *OX* (fig. 2). Considerând tensiunea tangenţială τ_{zx} liniară cu lungimea, forţa de frecare care se exercită între două straturi oarecare, vecine, aflate la distanţa dz unul de celălalt, este

$$dF_{\mu,zx} = \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx\, dy - \tau_{zx} dx\, dy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dxdydz. \tag{6}$$

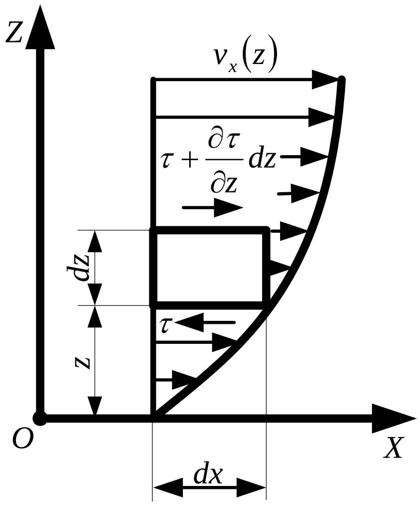

Figura 2. Schema de calcul a forţei de rezistenţă.

Potrivit legii frecării vâscoase a lui Newton [3, 4], tensiunea tangenţială de frecare între două straturi oarecare, vecine, din fluidul vâscos în mişcare unidirecţională este direct proporţională cu variaţia liniară a vitezei în sens transversal direcţiei generale de mişcare, adică $\tau_{zx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}$. În ipoteza constanţei coeficientului de viscozitate dinamică μ, pentru forţa de rezistenţă care se exercită în planul *XOZ* se obţine

$$dF_{\mu,zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) dxdydz = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dxdydz. \tag{7}$$

Similar se obţin expresiile forţelor de rezistenţă cauzate de variaţia cantităţii de mişcare în celelalte două plane:

$$dF_{\mu,yx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dxdydz; \tag{8}$$

$$dF_{\mu,xx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dxdydz. \tag{9}$$

Forţa de rezistenţă exercitată pe direcţia *OX* este

$$dF_{\mu,x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dxdydz. \tag{10}$$

Relaţii similare se pot scrie şi pentru celelalte două proiecţii ale vitezei v_y şi v_z:

$$dF_{\mu,y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) dxdydz; \tag{11}$$

$$dF_{\mu,z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dxdydz. \tag{12}$$

În consecinţă, forţa de rezistenţă exercitată asupra particulei fluide devine

$$dF_\mu = dF_{\mu,x}\vec{i} + dF_{\mu,y}\vec{j} + dF_{\mu,z}\vec{k} =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dxdydz\vec{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) dxdydz\vec{j} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dxdydz\vec{k} =$$

$$= \mu \Delta v_x dxdydz\vec{i} + \mu \Delta v_y dxdydz\vec{j} + \mu \Delta v_z dxdydz\vec{k} = \mu \Delta \vec{v} dxdydz = \mu \Delta \vec{v} d\vartheta,$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sunt versorii axelor de coordonate, $\Delta\vec{v}$ – operatorul lui Laplace în trei dimensiuni, aplicat funcţiei vectoriale $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$, iar Δv_x, Δv_y şi Δv_z – operatorii monodimensionali ai lui Laplace.

Rezultanta forţelor elementare de rezistenţă este

$$\vec{F}_\mu = \iiint_{\vartheta} \mu\Delta\vec{v}\,d\vartheta\,. \tag{14}$$

Între cele patru forţe, care se exercită asupra elementului de fluid de volum ϑ, se poate scrie, în baza principiului lui d´Alembert, relaţia vectorială

$$-\iiint_{\vartheta} \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}d\vartheta + \iiint_{\vartheta} \rho\vec{f}d\vartheta - \iiint_{\vartheta} \nabla p d\vartheta + \iiint_{\vartheta} \mu\Delta\vec{v}d\vartheta = 0\,, \tag{15}$$

sau

$$\iiint_{\vartheta}\left(\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho\vec{f} + \nabla p - \mu\Delta\vec{v}\right)d\vartheta = 0. \tag{16}$$

Deoarece nu s-a făcut nici o ipoteză cu privire la mărimea volumului ϑ, se poate deci considera şi cazul când volumul ϑ tinde spre zero. Astfel, se obţine ecuaţia diferenţială de mişcare a fluidelor vâscoase incompresibile în formă vectorială,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\Delta\vec{v}\,, \tag{17}$$

care proiectată pe axele sistemului trirectangular de coordonate devine

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right),\\
\frac{dv_y}{dt} &= f_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right),\\
\frac{dv_z}{dt} &= f_z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (18) reprezintă ecuaţiile de mişcare ale fluidelor vâscoase incompresibile în formă scalară şi sunt valabile pentru orice mediu continuu şi deformabil în mişcare laminară. Ele exprimă legea conservării cantităţii de mişcare.

Concluzii

1. Metoda alternativă de deducere a ecuaţiilor Navier-Stokes pentru mişcarea laminară a fluidelor vâscoase incompresibile are la bază principiul lui d´Alembert şi legea frecării vâscoase a lui Newton pentru mişcarea unidirecţională. Pentru transformarea integralei de suprafaţă în integrală de volum, se aplică relaţia integrală a gradientului.

2. Operaţiile matematice efectuate au o semnificaţie fizică clară, ceea ce conferă metodei o largă aplicabilitate.

Bibliografie

1. Navier, H., *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, présenté le 18 mars 1822*. Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institute de France, 1827, vol. 6, pp. 389-440.
2. Motulevici, V. P., *Uproşcionnîi vâvod uravnenia colicestva dvijenia viazcoi nesjimaemoi jidcosti*. Lesnoi vestnic, 2000, nr. 2, pp. 54-55.
3. Loiţeanschii, L. G., *Mehanica jidcosti i gaza*. Moscova: Hauca, 1978. -736 p., vezi pp. 23, 351.
4. Cernica I., *Mecanica fluidelor*. Bucureşti: Matrix Rom, 2011. -425 p., vezi pp. 36-38, 400.