UNELE APLICAȚII ALE PRODUSELOR VECTORILOR

Olga GUȚU

Universitatea Tehnică a Moldovei

***Abstract**: În lucrare sunt prezentate câteva tipuri de probleme, în rezolvarea cărora se aplică produse ale vectorilor (scalar, vectorial, mixt). Acestea sunt: calcularea distanței dintre două drepte necoplanare, determinarea distanței de la un punct până la un plan. De asemenea, este elaborată o metodă de calculare a distanței dintre două puncte pe suprafața globului pământesc, cunoscând doar coordonatele lor geografice și utilizând coordonatele sferice.*

***Cuvinte cheie**: Produsul scalar, vectorial și mixt; coordonate sferice, coordonate geografice.*

Vectorii joacă un rol important în geometria analitică. Produsele lor (scalar, vectorial și mixt) [1], se folosesc cu succes atât în rezolvarea problemelor teoretice, cât și a celor practice. În lucrare se arată cum pot fi aplicate produsele vectorilor în rezolvarea următoarelor probleme:

1) calcularea distanței dintre un punct și un plan;
2) calcularea distanței dintre două drepte necoplanare;
3) calcularea momentului forței;
4) calcularea distanței dintre două puncte pe o suprafața sferică (pe suprafața Pământului).

1. Distanța dintre un punct și un plan.

Aceasta se definește ca lungimea perpendicularei, trasate din punct la plan. Fie date punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și planul π, determinat de ecuația $ax+by+cz+d = 0$. De asemenea, fie $M_0\, M$, unde $M\ (x, y, z) \in \pi$, perpendiculara la plan de lungime h (Fig. 1).

Vectorul normal $\bar{n} = (a, b, c)$ și vectorul $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ sunt coliniari; unghiul φ dintre ei poate fi 0^0 sau 180^0. Produsul lor scalar se calculează în două moduri.

a) Conform definiției, $\bar{n}\cdot \overrightarrow{M_0M} = |\bar{n}|\cdot h\cdot\cos\varphi$, de unde $|\bar{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}| = |\bar{n}|\cdot h$.

b) În coordonate, $\bar{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$. Această expresie se aduce la forma $(ax + by + cz + d) - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$. Cum $M_0(x, y, z) \in \pi$, rezultă $ax + by + cz + d = 0$. Prin urmare, $\bar{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$, de unde $|\bar{n}\cdot \overrightarrow{M_0M}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$. Comparând valorile pentru $|\bar{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}|$, obținute în punctele a) si b), se obține $|\bar{n}|\cdot h = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$. Cum $|\bar{n}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, se obține definitiv,

$$h = \frac{|ax_0+bx_0+cx_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (1)$$

2. Distanța dintre două drepte necoplanare.

Prin aceasta se înțelege lungimea segmentului, care este perpendicular ambelor drepte și are extremitățile pe acestea.

Fiind date ecuațiile unei drepte, deja sunt cunoscute (sau pot fi ușor aflate) un punct al ei și un vector normal.

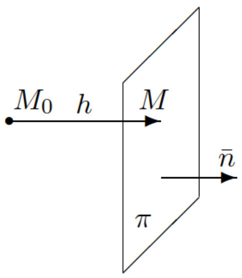

Fig. 1

Fie l_1 și l_2 două drepte, determinate de ecuațiile lor canonice și, echivalent, de ecuațiile parametrice:

$$(l_1):\ \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1t + x_1, \\ y = b_1t + y_1, \\ z = c_1t + z_1. \end{cases}$$

$$(l_2):\ \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_2t + x_2, \\ y = b_2t + y_2, \\ z = c_2t + x_2. \end{cases}$$

Dreapta l_1 conține punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și are vectorul director $\overline{m_1} = (a_1, b_1, c_1)$. Dreapta (l_2): conține punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ și are vectorul director $\overline{m_2} = (a_2, b_2, c_2)$.

Metoda 1. Folosirea produsului scalar. Pe dreptele date există câte un punct $A_1 \in l_1$ și $A_2 \in l_2$ astfel, încât segmentul A_1A_2 este perpendiculara comună a dreptelor date. Lungimea acestui segment este exact distanța dintre drepte. Punctele A_1 și A_2 pot fi aflate în modul următor.

1) Fie $A_1(a_1t+x_1, b_1t+y_1, c_1t+z_1)$ și $A_2(a_2p+x_2, b_2p+y_2, c_2p+z_2)$ cu parametrii t și p nedeterminați.

2) Se determină coordonatele vectorului $\overrightarrow{A_1A_2}$.

3) Cum $\overrightarrow{A_1A_2} \perp \overline{m_1}$ și $\overrightarrow{A_1A_2} \perp \overline{m_2}$, se obține, în coordonate, un sistem de ecuații liniare $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overline{m_1}=0$ și $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overline{m_2} = 0$, cu necunoscutele t și p.

4) Rezolvând sistemul, se determină parametrii t si p, deci si punctele A_1, A_2.

5) Se află modulul vectorului $\overrightarrow{A_1A_2}$ care și este distanța dintre dreptele l_1 și l_2.

Exemplul 1. Folosind algoritmul expus, se va determina distanța dintre dreptele necoplanare l_1 și l_2, determinate de ecuațiile lor canonice:

$$(l_1) : \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-7}{3} \quad \text{și } (l_2) : \frac{x-2}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+13}{-1}.$$

Se consideră punctele $A_1(3t-4, -2t+2, 3t+7) \in l_1$ și $A_2(p+2, 2p-6, -p-13) \in l_2$. Pentru ele, $\overrightarrow{A_1A_2} = (p-3t+6, 2p+2t-8, -p-3t-20)$. Egalând cu 0 produsele scalare $\overline{m_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$ și $\overline{m_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$, se obține sistemul de ecuații $2p + 11t + 13 = 0$, $3p + 2t + 5 = 0$ cu soluția $p = t = -1$. Cu aceste valori ale parametrilor se află $A_1(-7, 4, 4)$ și $A_2(1, -8, -12)$. În final, $A_1A_2 = 4\sqrt{29}$, care și este distanța dintre dreptele date.

Metoda 2. *Folosirea produsului vectorial*. Se va considera un plan, care conține dreapta l_2 și este paralelă dreptei l_1 (Fig. 2).

1) Vectorii $\overline{m_1}$ și $\overline{m_2}$ se plasează cu originea în M_2. Acești vectori determinaă un plan π.

2) În calitate de vector normal al acestui plan se ia produsul vectorial $\bar{n} = \overline{m_1} \times \overline{m_2}$.

3) Se alcătuiește ecuația planului π ca ecuația planului, ce trece prin punctul dat M_2, perpendicular vectorului dat $\bar{n}$.

4) Se calculează distanța de la punctul dat M_1 până la planul π, care și este distanța dintre dreptele l_1și l_2.

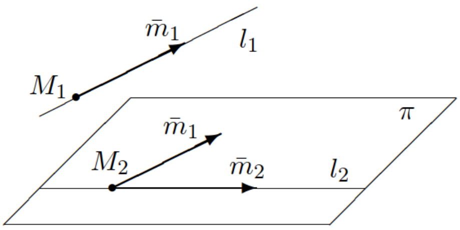

Fig. 2

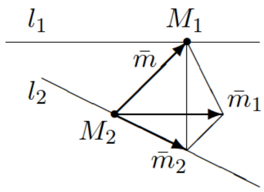

Fig. 3

Exemplul 2. Aplicând această metodă, se va determina distanța dintre dreptele necoplanare

$$(l_1) : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{și } (l_2) : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

Pentru aceste drepte, $M_1(9, -2, 0)$, $M_2(0, -7, 2)$, $\overline{m_1} = (4, -3, 1)$, $\overline{m_2} = (-2, 9, 2)$. Un vector normal al planului π este $\bar{n} = \overline{m_1} \times \overline{m_2} = (-15, -10, 30)$, iar ecuația planului devine $3x + 2y - 6z + 2 = 0$.

Distanța d dintre drepte este distanța de la punctul M_1 până la planul π; se obține $d = 7$.

Metoda 3. Folosirea produsului mixt. Se consideră piramida, construită pe vectorii $\overline{m_1}$, $\overline{m_2}$ și $\bar{m} = \overrightarrow{M_1M_2}$ cu originea comună M_2 (Fig. 3). Volumul acestei piramide se calculează prin două metode.

1) Folosind produsul mixt, se obține $V = 61 \cdot |\overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\ \bar{m}|$.

2) Folosind produsul vectorial, se află aria bazei, $A = 21 \cdot |\overline{m_1} \times \overline{m_2}|$.

3) Notând cu h înălțimea piramidei, trasate din M_1, se scrie $V = 61|\overline{m_1} \times \overline{m_2}| \cdot h$. Evident, h este exact distanța dintre drepte.

4) Din egalitatea $\frac{1}{6} \cdot |\overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\bar{m}| = 61|\overline{m_1} \times \overline{m_2}| \cdot h$ se află

$$h = \frac{|\overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\bar{m}|}{|\overline{m_1} \times \overline{m_2}|}. \qquad (2)$$

Exemplul 3. Folosind metoda expusă, se va afla distanța dintre dreptele necoplanare

$(l_1) : x = 2t - 4,\ y = -t + 4,\ z = -2t - 1$ și $(l_2) : x = 4t - 5,\ y = -3t + 5,\ z = -5t + 5.$

Acum $M_1(-4, 4, -1)$, $M_2(-5, 5, 5)$, $\overline{m_1} = (2, -1, -2)$, $\overline{m_2} = (4, -3, -5)$. Se determină: vectorul $\bar{m} = \overrightarrow{M_1M_2} =$ $=(1, -1, -6)$; produsul vectorial $\overline{m_1} \times \overline{m_2} = (1, 2, -2)$ cu $|\overline{m_1} \times \overline{m_2}| = 3$; podusul mixt $\overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\bar{m} = 9$. Conform formulei (1), se află distanța dintre drepte: $d = \frac{|9|}{3} = 3$.

Exemplul 4. Să se afle distanța dintre diagonala cubului cu muchia 1 și diagonala unei fețe, care nu intersectează diagonala cubului.

Se introduce un sistem de coordonate *OXYZ* cu originea într-un vârf al cubului și cu axele, luate în direcțiile celor trei muchii, ce pornesc din acest vârf (Fig. 4). Se determină coordonatele extremităților celor două diagonale: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(1, 0, 0)$.

1) Pe diagonala *OA* se consideră punctul $O(0, 0, 0)$ și vectorul director $\overline{m_1} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$.

2) Pe diagonala *BC* se consideră punctul $B(0, 0, 1)$ și vectorul director $\overline{m_2} = \overrightarrow{BC} = (1, 0, -1)$.

În aceste condiții, al treilea vector va fi $\overline{m} = \overrightarrow{OB} = (0, 0, 1)$. Se calculează produsele vectorilor:

$$\overline{m_1} \times \overline{m_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1); \quad \overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\overline{m} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Conform formulei (2), se află distanța cerută:

$$d = \frac{|\overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\overline{m}\,|}{|\overline{m_1} \times \overline{m_2}\,|} = \frac{|-1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

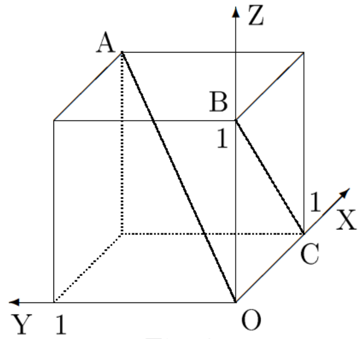

Fig. 4

Remarcă. Distanța dintre două drepte necoplanare mai poate fi calculată și cu ajutorul metodelor analizei matematice. Această metodă constă în următoarele. Se consideră dreptele l_1 și l_2 , determinate de ecuațiile parametrice, așa cum s-a procedat la punctul 2, Metoda 1. Se iau punctele $A_1 \in l_1$ și $A_2 \in l_2$ cu coordonatele, exprimate prin parametrii *t*, respectiv, *p*. Se calculează lungimea segmentului A_1A_2, care devine o funcție de variabilele *t* și *p*. Egalând cu zero derivatele parțiale ale acestei funcții, se obține un sistem de ecuații liniare, din care se află un singur punct critic. Din considerente geometrice e clar, că funcția poate avea doar minim. Cu punctul critic aflat se determină coordonatele punctelor A_1 și A_2, apoi și lungimea segmentului A_1A_2, adică distanța dintre dreptele date.

3. Calcularea momentului forței în raport cu un punct.

În fizică, momentul forței se folosește adeseori. Dacă forța $\vec{F}$ acționează asupra unui punct *M*, atunci momentul ei $\overrightarrow{M_0}$ în raport cu un punct arbitrar *O* este exact produsul vectorial $\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$ (Fig. 5). În acest caz, vectorul $\overrightarrow{M_0}$ este perpendicular planului, determinat de vectorul $\vec{F}$ și punctul *O*.

De exemplu, dacă forța $\vec{F}$ se aplică punctului $A(-1, -2, 2)$, atunci momentul ei în raport cu originea de coordonate va fi vectorul

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = (-1, -2, 2) \times (4, -2, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-2, 11, 10).$$

Mărimea ei, $\overrightarrow{M_0} = \sqrt{(-2)^2 + 11^2 + 10^2} = 5$.

În strânsă legătură cu momentul forței față de un punct este și momentul forței față de o axă. Acesta este proiecția vectorului $\overrightarrow{M_0}$ pe axa, determinată de un vector arbitrar $\bar{a}$. În particular, momentele forței în raport cu axele de coordonate OX, OY, OZ vor fi exact coordonatele vectorului $\overrightarrow{M_0}$. În exemplul precedent,

$$\overrightarrow{M_{ox}} = -2, \quad \overrightarrow{M_{oy}} = 11, \quad \overrightarrow{M_{oz}} = 10.$$

4. Distanța dintre două puncte pe suprafața sferică.

În afară de coordonatele carteziene ale punctului din spațiu se mai folosesc și coordonatele sferice. Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar în sistemul cartezian și *P* proiecția lui pe planul XOY . Poziția punctului *M* poate fi determinatăși de alte trei numere: ρ, θ și φ. În acest caz, $\rho = OM$, θ este unghiul dintre segmentul *OP* și axa OX, iar φ este unghiul dintre *OM* și planul XOY (Fig. 6). Numerele ρ, θ, φ constituie coordonatele sferice ale punctului *M*: $M(\rho, \theta, \varphi)$. Legătura dintre coordonatele carteziene și cele sferice se stabilește fără vre-o dificultate:

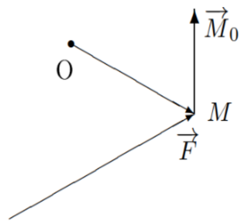

Fig. 5

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta,\ y = \rho \cos \varphi \sin \theta,\ z = \rho \sin \varphi. \qquad (3)$$

Se știe, că suprafața Pământului nu este o sferă perfectă, ci e turtită la poli. Vom admite, totuși, că Pământul este o sferă perfectă cu raza R = 6367 km - greșelile obținute vor fi total nesemnificative. Vom considera, că sistemul cartezian XOY are originea în centrul Pământului, iar axa OZ este orientată spre polul nord. Atunci intersecția planului de coordonate XOY cu suprafața Pământului va coincide cu ecuatorul. Axa

OX va fi orientată spre punctul de intersecție a ecuatorului cu meridianul Greenwich. Acest meridian a fost ales ca meridian 0 în anul 1884 la o conferința internațională a geografilor. Oricare punct de pe suprafața Pământului este determinat de două coordonate θ și φ, a treia coordonată fiind constantă: ρ = R = 6367 km. Valorile lui θ se vor depune de la meridianul 0: cu semnul plus spre est (longitudinea estică) și cu semnul minus spre vest (longitudinea vestică). Astfel, $-180^{o} \leq \theta \leq 180^{o}$. Valorile unghiului φ se vor depune de la ecuator: cu semnul plus spre nord (latitudinea nordică) și cu semnul minus spre sud (latitudinea sudică). Prin urmare, $-90^{o} \leq \varphi \leq 90^{o}$.

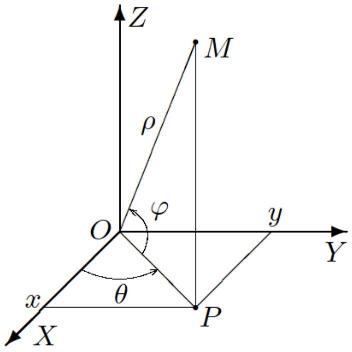

Fig. 6

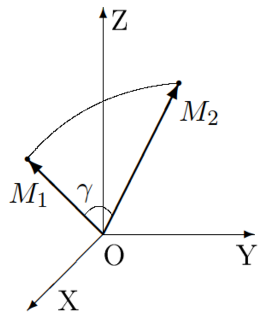

Fig. 7

Pentru oricare două puncte de pe suprafața sferică, distanța cea mai scurtă nu este lungimea segmentului ce le unește, ci lungimea celui mai mic arc, situat pe cercul de intersecție a suprafeței sferice cu planul, care trece prin cele două puncte și prin centrul Pământului. În continuare, se va expune o metodă de calculare a acestei distanțe, folosind produsul scalar a doi vectori.

Fie $M_1(\rho, \theta_1, \varphi_1)$ și $M_2(\rho, \theta_2, \varphi_2)$ două puncte arbitrare pe suprafața sferei (Fig. 7). Conform formulelor (3) se află coordonatele lor carteziene; fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Se examinează apoi vectorii $\bar{a} = \overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1)$ și $\bar{b} = \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$ cu produsul scalar $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. În același timp, dacă γ este unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, se află $\bar{a} \cdot \bar{b} = R^2 \cos \gamma$. Din cele două expresii pentru $\bar{a} \cdot \bar{b}$ se află unghiul γ (în radiani), apoi și lungimea arcului, $M_1M_2 = \gamma R$, adică exact distanța pe sferă dintre punctele M_1 și M_2.

În calitate de exemplu, s-au luat punctele $M_1(R, 28^{o}55', 47^{o})$ - orașul Chișinău și punctul, care reprezintă orașul Paris: $M_2(R, 2^{o}21'03'', 48^{o}51'24'')$. Pentru unghiul γ s-a aflat valoarea 0,310765, apoi și distanța dintre aceste orașe, egală cu 1985 km. Acest rezultat este în deplină concordanță cu distanța exactă dintre aceste orașe, care, conform [2], este egală cu 1977,82 km. Analog, s-au aflat distanțele dintre Chișinău și Roma (1417 km), dintre Chișinău și Washington (7995 km). Și în aceste cazuri erorile sunt total nesemnificative.

Bibliografie

1. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., Наука, 1969.
2. www. Distancecalculator.net.