Dirijarea optimală a proceselor ondulatorii prin aplicarea principiului maxim Pontreaghin

Gheorghi CEBAN
Technical University of Moldova
georghe.ceban@adm.utm.md

***Abstract.* Este propusă o metodă bazată pe principiul de maxim Pontreaghin de determinare a dirijării optimale după frontieră şi a proceselor ondulatorii optimale în sistemele cu dirijare optimală cu parametri distribuiţi, dinamica cărora este descrisă de ecuaţii ondulatorii fără pierderi sau cu parametri balansaţi. Dirijarea optimală se obţine pe frontieră în formă analitică finită.**

***Cuvinte cheie:*structuri oscilatorii neomogene,sisteme cu parametri distribuiţi, D-transformata,L-transformata, principiul maximum Pontreaghin.**

În lucrare principiul maxim Pontreaghin [1] este aplicat pentru obţinerea dirijării optimale dupa frontieră şi a proceselor ondolutorii optimale, care au loc în sistemele de dirijare optimală cu parametri distribuiţi [2], dinamica cărora este descrisă de ecuaţii ondulatorii fără disipaţie, sau cu parametri balansaţi.

Ideea de bază constă în trecerea prin aplicarea transformatelor Laplace (integrală, discretă şi discretă modificată) după timp de la sistema iniţială de ecuaţii diferenţiale în derivate parţiale la o sistemă echivalentă de ecuaţii în diferenţe[3].

Pentru ilustrarea metodei propuse se consideră un bloc oscilatoriu simplu cu parametri distribuiţi în timp, dinamica căruia este descrisă de următoarea problemă de frontieră:

$$\begin{cases} -\partial\omega(x,t)/\partial x = k_1 \partial M(x,t)/\partial t, \\ -\partial M(x,t)/\partial x = k_2 \partial\omega(x,t)/\partial t \end{cases} \quad (1)$$

unde $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, k_1, $k_2 > 0$; l-lungimea blocului, k_1, k_2 - coeficienti reali ce depind de proprietaţile sistemului initial; ω, M -parametri generalizati.

Condiţiile iniţiale:

$$\omega(x,0) = M(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l. \qquad (2)$$

Condiţiile de frontieră:

$$\omega(0,t) = U_{1f}(t), \omega(l,t) = \mu M(l,t) \qquad (3)$$

μ- o constanta arbitrara, ce determina caracterul legaturii blocului cu sarcina, iar $U_{1f}(t)$ -dirijarea la frontieră.

Aplicînd la problema (1)-(3) transformata integrală Laplace după timp obţinem:

$$\overline{M}(\eta,q) = \overline{U_{1f}}(q) f(\eta,q)\ell^{0.5q} /(T\rho(\ell^q - \theta))(4)$$

$$\overline{\omega}(\eta,q) = \overline{U_{1f}}(q) f(\eta,q)\ell^{0.5q} /(T(\ell^q - \theta))(5)$$

unde

$$f(\eta,q) = [\ell^{0..5^{(1-2\eta)q}} + \theta\ell^{-0..5^{(1-2\eta)q}}]\overline{U_{1f}}(q),$$

$$T = 2\tau, \tau = \gamma l, \gamma = \sqrt{k_1}k_2, \eta = 0.5x/l,$$

$$\theta = (\rho - \mu)/(\rho + \mu), \rho = \sqrt{k_1/k_2}, q = pT$$

p-parametrul transformatei Laplace.

Toate raţionamentele care urmează se efectuiază pentru procesul ondulatoriu $\overline{M}(\eta,q)$. Pentru $\overline{\omega}(\eta,q)$ procedura de optimizare este analogică.

Aplicînd la (4) transformata discretă modificată Laplace, obţinem:

$M^*(\eta,q\varepsilon) = f(q,\varepsilon,\eta)/(T\rho(\ell^q - \theta))$, unde

$$f(q,\varepsilon,\eta) =$$
$$U_{1f}{}^*(q,1+\varepsilon-\eta) + \theta U_{1f}{}^*(q,\varepsilon+\eta), 0 \le \varepsilon \le \eta(6)$$

$$f(q,\varepsilon,\eta) =$$
$$\ell^q U_{1f}{}^*(q,\varepsilon-\eta) + \theta U_{1f}{}^*(q,\varepsilon+\eta), \eta \le \varepsilon \le 1-\eta(7)$$

$$f(q,\varepsilon,\eta) =$$
$$U_{1f}{}^*(q,\varepsilon-\eta) + \theta U_{1f}{}^*(q,\varepsilon+\eta-1), 1-\eta \le \varepsilon \le 1(8)$$

Trecând în (6)-(8) la originale [1],[5]-[8] determinăm ecuaţiile în diferenţe corespunzătoare problemei (1)-(3) faţă de funcţia M[η, n, ε] în forma:

$$T\rho(M[\eta,n+1,\varepsilon] - \theta M[\eta,n,\varepsilon]) =$$
$$U_{1f}[n,1+\varepsilon-\eta] + \theta U_{1f}[n,\varepsilon+\eta], 0 \le \varepsilon \le \eta(9)$$

Analog şi pentru $\eta \le \varepsilon \le 1-\eta, 1-\eta \le \varepsilon \le 1$.

Notând

$$U[n,\varepsilon]=\frac{(U_{1f}[n,1+\varepsilon-\eta]+\theta U_{1f}[n,\varepsilon+\eta])}{T\rho},(10)$$ d

$M_1[\eta,n,\varepsilon]=M[\eta,n,\varepsilon]$

in (9) obţinem

$M_1[\eta,n+1,\varepsilon]=\theta M_1[\eta,n,\varepsilon]+U[n,\varepsilon]$. (11)

Problema dirijării optimale pentru sistema considerată poate fi formulată astfel [4]:

De determinat aşa o dirijare admisibilă $U[n,\varepsilon]$ încât funcţionalul J= -

$$\sum_{k=1}^{N}\{(M_d[k]-M_1[\eta,n,\varepsilon])^2+(U[k-1,\varepsilon])^2\}$$

unde N-timpul fixat, M_d-valoarea dorită a procesului M(x,t) să atingă maximumul său.

Notând

$M_2[\eta,n,\varepsilon]=$

$$\sum_{k=0}^{N}\{(M_d[k]-M_1[\eta,k,\varepsilon])\text{^}2+U\text{^}2[k-1,\varepsilon]\}(12)$$

$M_1[\eta,n+1,\varepsilon]=$

$\theta M_1[\eta,n,\varepsilon]+U[n,\varepsilon]=f_1[\eta,n,\varepsilon]$, (13)

$M_2[\eta,n+1,\varepsilon]=M_2[\eta,n,\varepsilon]+(M_d[n+1,\varepsilon]-$ (14)

$\theta M_1[\eta,n,\varepsilon]-U[n,\varepsilon])^2+(U[n,\varepsilon])^2=f_2[\eta,n,\varepsilon]$

J$=-M_2[n,\eta,\varepsilon]$ (15)

Atunci problema dirijării optimale se formulează astfel: De determinat asa o dirijare $U[n,\varepsilon]$ şi aşa o traiectorie $M[\eta,n,\varepsilon]$ încât funcţionalul **J** să atingă maximum.

Aplicâm la problema (11)-(14) principiul discret de maximum al lui L.Pontreaghin [4] în admiterea că-n momentul iniţial de timp sistemul se afla in stare de repaos, adică punctual iniţial al sistemului va fi $\{M_1[\eta,0,0]=0, M_2[\eta,0,0]=0\}$.

Matricea linie a funcţionalului **J** este C=(0 1), iar funcţia $H(\psi_1,\psi_2 M_1,M_2,U)=$

$\psi_1[k]f_1[\eta,k,\varepsilon]+\psi_2[k]f_2[\eta,k,\varepsilon]$. (16)

Matricea $\psi[k-1]=(\psi_1[k];\psi_2[k])$ satisface ecuaţia $\psi[k-1]=\psi[k]*F[k]$, (17)

unde k=0,1,2,…,N-1 si condiţiile iniţiale $\psi[-1]=0,\psi[N-1]=C$, iar matricea F(k) cu liniile (0 0) si

$(-2\theta(M_d[k+1]-\theta M_1[\eta,k,\varepsilon]-U[k,\varepsilon])=a;1)$.

Din expresiile pentru $\psi[k-1]$ şi F(k) obţinem $\psi_2[k-1]=\psi_2[k]$ şi

$\psi_1[k-1]=\theta\psi_1[k]-2\theta*a*\psi_2[k]$ (18)

pentru k=0,1,…,N+1.Din prima condiţie şi condiţiile de frontieră obţinem $\psi_2[k]=-1$ pentru orice k.

Din diferenţiabilitatea după U a funcţiei $H(\psi,M,U]$ pentru ψ_1,M_1,M_2 fixate rezul tă că condiţia de extremum a functiei H dupa Ueste:

$$\frac{\partial H}{\partial U}=\psi_1[k]-2(M_d[k+1]-\theta M_1[\eta,k,\varepsilon]-$$

$$2U[k,\varepsilon]=0$$

În rezultat $\begin{matrix}U[k,\varepsilon]=0.5M_d[k+1,\varepsilon]-\\ 0.5\theta M_1[\eta,k,\varepsilon]-0.25\psi_1[k]\end{matrix}$ (19)

Din (13), (18), (19) obţinem sistemul de ecuaţii în diferenţe pentru determinarea traiectoriei optimale $M_1[\eta,k,\varepsilon]$ şi a funcţiei $\psi_1[k]$ care este echivalent sistemului:

$$\psi_1[k+2]-((\theta^2+2)/(3\theta)\psi_1[k+1]+(1/3)\psi_1[k]=$$
$$(2/3)(\theta M_d[k+2,\varepsilon]-M_d[k+3,\varepsilon])=f_3[k,\varepsilon](20)$$

$$M_1[\eta,k+1,\varepsilon]-$$
$$(\theta/2)M_1[\eta,k,\varepsilon]=0.5M_d[k+1,\varepsilon]-0.25\psi_1[k].(21)$$

Soluţia generală a ecuaţiei (20) conform [4]:

$$\psi_1[k]=\sum_{n=0}^{k-1}f_3[n,\varepsilon](\lambda_1^{n+1}\lambda_2^k-\lambda_2^{n+1}\lambda_1^k)/((\lambda_1\lambda_2)^{n+1}(\lambda_2-$$
$$\lambda_1))+\lambda_1^kC_{10}+\lambda_2^kC_{20},$$

unde $\lambda_{1,2}=(\theta^2+2-\sqrt{\theta^4-8\theta^2+4})/(6\theta)$ - rădăcinele ecuaţiei caracteristice, iar C_{10}, C_{20} –careva constante determinate din condiţiile $\psi_1[-1]=\psi_1[N-1]=0.$

$$C_{10}=\lambda_1(\alpha-\lambda_2^N\beta)/(\lambda_2^N-\lambda_1^N),$$

$$C_{20}=-\lambda_2(\alpha-\lambda_1^N\beta)/(\lambda_2^N-\lambda_1^N),$$

$$\alpha=\sum_{n=0}^{N-2}f_3[n,\varepsilon]R[n,N-1],\beta=\sum_{n=0}^{N-2}f_3[n,\varepsilon]R[n,-1],$$

$$R[n,k]=(\lambda_1^{n+1}\lambda_2^k-\lambda_2^{n+1}\lambda_1^k)/\lambda_1^N-\lambda_2^N).$$

Atunci

$$\psi_1[k]=\sum_{n=0}^{k-1}f_3[n,\varepsilon]R[n,k]+\lambda_1^kC_{10}+\lambda_2^kC_{20},(22)$$

Din (21) şi (22) determinăm

$M_1[\eta,k,\varepsilon]\sum_{m=0}^{k}(\theta/2)^{k-m}U[m-1,\varepsilon]$, unde

$U[k,\varepsilon]=0.5M_d[k+1,\varepsilon]-0.25\psi_1[k]$ (23)

Substituind (22) în (18) obţinem dirijarea optimală adiţională

$U_{opt}[k,\varepsilon] = U[k,\varepsilon] - (\theta/2)M_1[\eta,k,\varepsilon]$ (24)

Utilizând (24) şi (12) determinăm dirijarea optimală $U_{1f}[n,\varepsilon]$ aplicată pe frontiera $\eta = 0$ pe intervalul $0 \le \varepsilon \le \eta$

$$U_{1f}^{opt}(n+\varepsilon+\eta) = (U_{opt}(n+\varepsilon+\eta))/(1+\theta).$$

În mod analogic se obţin expresiile pentru dirijarea optimala lape frontieră $\eta \le \varepsilon \le 1-\eta; 1-\eta \le \varepsilon \le 1$.

Literatura

[1].В.А.Иванов,В.К.Чемоданов, В.С.Медведев. Математические основы теории автоматического регулирования. М.»Высшая школа»,1971.

[2].А.Г.Бутковский. Теория оптимального управления системами с распределен -ными параметрами. М.,»Наука»,1965.

[3].Я.Б.Кадымов. Переходные про -цессы в системах с распределенными параметрами.М.,»Наука»,1968.

[4].А.И.Пропой. Элементы теории оптимальных дискретных процессов.М.,»Наука»,1973.

[5]. Я.З.Цыпкин Теория линейных импульсных систем. М.,Физматгиз,1963.

[6]. А.Г.Бутковский.Структурная теория распределенных систем.М.»Наука»,1977

[7]. А.Г.Бутковский.Характеристики систем с распределенными параметрами.М.,»Наука»,1979.

[8]. А.Г.Бутковский, Л.М.Пустылников. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.,»Наука», 1980.