

ELABORAREA PROGRAMULUI DE CALCUL A PLĂCII SIMPLU REZEMATE PE DOUĂ LATURI OPUSE FOLOSIND SERIILE LEVY

Autor: Sergiu GALBINEAN
Conducător științific: dr. hab. prof. univ. Gheorghe MORARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: Se propune de calculat eforturile într-o placă dreptunghiulară, simplu rezemată pe două laturi opuse, și cu legături oarecare pe celelalte două, folosind seriile Levy. Pentru aceasta se va elabora un program în limbajul de programare Matlab. Rezultatele obținute se vor compara cu alte metode de calcul.

Cuvinte cheie: placă, serii Levy, moment de încovoiere, moment de răsucire

Dacă rezemate simplu sunt laturile $x = 0$ și $x = a$ (fig. 1), funcția $w(x, y)$ poate fi luată sub forma

$$w(x, y) = \sum_m Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} . \quad (1)$$

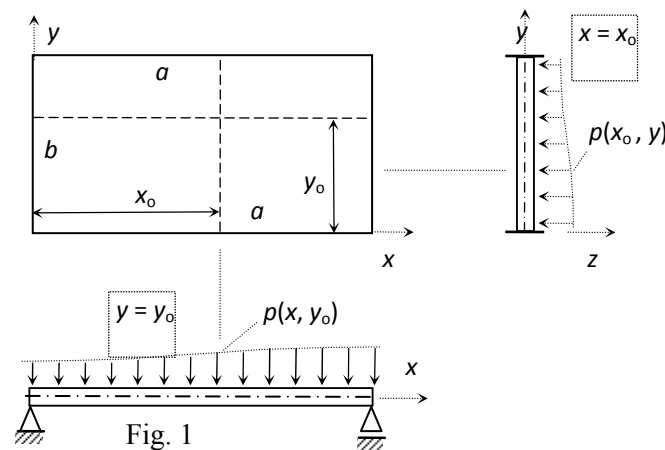


Fig. 1

Dezvoltând și încărcarea $p(x, y)$ într-o serie de aceeași formă,

$$p(x, y) = \sum_m p_m(y) \sin \alpha_m x , \quad (2)$$

unde

$$\alpha_m = m\pi / a , \quad (3)$$

se obține (v. și **Ошибка! Источник ссылки не найден.**),

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin(\alpha_m x) dx . \quad (4)$$

Frecvent, se întâlnesc două cazuri:

1) încărcare distribuită uniform,

$$p_m(y) = \frac{4p}{m\pi} = const. , m = 1, 3, 5, \dots ; \quad (5)$$

2) încărcare distribuită hidrostatic după legea $p(x, y) = px/a$,

$$p_m(y) = \frac{2p}{m\pi} (-1)^{m+1} = const. , m = 1, 2, 3, \dots . \quad (6)$$

Este cunoscut din teoria clasică a plăcii că ecuația diferențială a plăcii are forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (7)$$

Înlocuind relația (1) și (2) în ecuația diferențială a plăcii (7) obținem:

$$Y_m''' - 2\alpha_m^2 Y_m'' + \alpha_m^4 Y_m' = p_m / D, \quad (8)$$

care este o ecuație diferențială de ordinul patru, cu coeficienți constanți. Notând cu Y_m^{part} soluția particulară a ecuației (8) și ținând seama că rădăcinile $r_{1,2,3,4} = \pm \alpha_m y$ ale ecuației caracteristice a ecuației sale omogene sunt reale, $r_{1,2,3,4} = \pm \alpha_m y$, soluția generală

$$Y_m(y) = Y_m^{\text{omog}} + Y_m^{\text{part}}, \quad (9)$$

se scrie sub forma

$$Y_m(y) = A_m \cosh \alpha_m y + B_m \sinh \alpha_m y + C_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + Y_m^{\text{part}}, \quad (10)$$

Prin urmare funcția săgeții devine:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \alpha_m y + B_m \sinh \alpha_m y + C_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + Y_m^{\text{part}} \right) \sin \alpha_m x \quad (11)$$

unde constantele de integrare A_m, B_m, C_m, D_m se obțin pe baza condițiilor la limită scrise pentru laturile paralele cu axa x , condiții la limită care pot fi de orice tip.

Pentru placa încărcată uniform pe toată suprafața, ținând seama de (5), din (8) rezultă:

$$Y_m^{\text{part}} = \frac{p_m}{\alpha_m^4 D} = \frac{4p}{D m \pi \alpha_m^4} = \frac{4pa^4}{D \pi^5 m^5}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (12)$$

În continuare ca exemplu se va calcula o placă pătrată (fig. 2) simplu rezemată pe laturile $x = 0$ și $x = a$, încadrată rigid pe latura $y=0$ și liberă pe latura $y=b$. Dimensiunea plăcii este de 6x6 m și grosimea $\delta=15$ cm. Materialul plăcii și grinzilor – beton-armat clasa C15 cu modulul de elasticitate $E=2,31 \cdot 10^7$ kN/m² și coeficientul lui Poisson $\nu=0,2$. Placa este acționată de o sarcină uniform distribuită $p=10$ kN/m².

Scriind condițiile de frontieră:

$$\text{-pentru latura încadrată } (y=0) \quad \begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases};$$

-pentru latura liberă ($y=b$)

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ Q_y^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{cases}$$

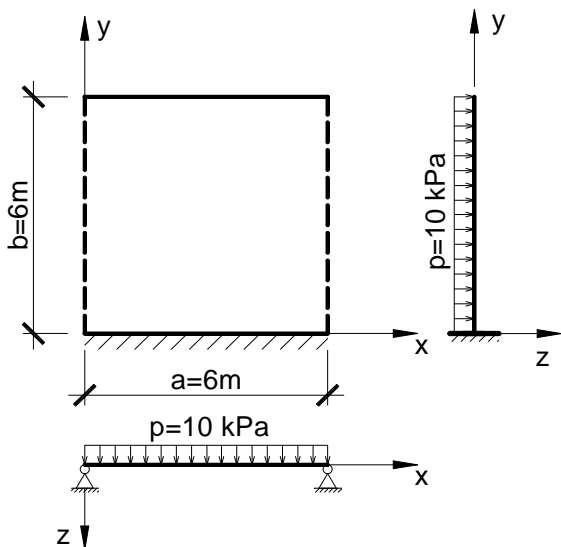
se rezolvă sistemul de 4 ecuații și se obțin constantele

de integrare A_m, B_m, C_m, D_m .

$$A_m = -Y_m^{\text{part}} = -\frac{4pa^4}{D \pi^5 m^5};$$

Fig. 2

$$B_m = \frac{(3+\nu)(1-\nu)C^2 + 2\nu C - (1-\nu^2) - \nu(1-\nu)\kappa S}{(3+\nu)(1-\nu)C^2 + (1+\nu)^2 + (1-\nu)^2 \kappa^2} \cdot Y_m^{\text{part}};$$



$$C_m = \frac{(3+\nu)(1-\nu)CS + \nu(1+\nu)S - \nu(1-\nu)\kappa C - (1-\nu)^2 \kappa}{(3+\nu)(1-\nu)C^2 + (1+\nu)^2 + (1-\nu)^2 \kappa^2} \cdot Y_m^{\text{part.}};$$

$$D_m = -\frac{(3+\nu)(1-\nu)CS + \nu(1+\nu)S - \nu(1-\nu)\kappa C - (1-\nu)^2 \kappa}{(3+\nu)(1-\nu)C^2 + (1+\nu)^2 + (1-\nu)^2 \kappa^2} \cdot Y_m^{\text{part.}};$$

unde $C = \cosh \alpha_m b$, $S = \sinh \alpha_m b$, $\kappa = \alpha_m b$.

Eforturile interioare în funcție de săgeată se determină cu relațiile:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^2 Y_m - \nu Y_m'') \sin \alpha_m x; \\ M_y &= D \sum_{m=1}^{\infty} (-Y_m'' - \nu \alpha_m^2 Y_m) \sin \alpha_m x; \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m Y_m' \cos \alpha_m x; \\ Q_x &= D \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^3 Y_m - \alpha_m Y_m'') \cos \alpha_m x; \\ Q_y &= D \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^2 Y_m' - Y_m''') \sin \alpha_m x; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Tabelul 1

Mărimea determinată în punctul dat	Levy	Valori tabelare	Rezultatele obținute prin MEF pentru placa discretizată în nxn elemente				
			8x8	12x12	16x16	20x20	24x24
w_l [mm]	10,76	-	10,78 (0,2%)	10,73 (-0,3%)	10,71 (-0,5%)	10,70 (-0,5%)	10,70 (-0,5%)
M_{x1} [kNm/m]	21,00	19,49 (-7,2%)	20,00 (-4,8%)	19,79 (-5,8%)	19,72 (-6,1%)	19,69 (-6,2%)	19,67 (-6,3%)
M_{y1} [kNm/m]	9,14	9,74 (6,6%)	9,30 (1,8%)	9,03 (-1,2%)	8,94 (-2,2%)	8,89 (-2,7%)	8,87 (-2,9%)
M_{x2} [kNm/m]	35,61	31,66 (-11,1%)	34,57 (-2,9%)	34,30 (-3,7%)	34,21 (-3,9%)	34,17 (-4,0%)	34,15 (-4,1%)
M_{y3} [kNm/m]	-43,83	-42,30 (3,5%)	-41,74 (4,8%)	-42,09 (4,0%)	-42,21 (3,7%)	-42,28 (3,5%)	-42,31 (3,4%)
M_{xy4} [kNm/m]	12,33	13,22 (7,2%)	11,16 (-9,5%)	11,10 (-10,0%)	11,08 (-10,1%)	11,07 (-10,2%)	11,07 (-10,2%)

În continuare este prezentată programa creată în limbajul de programare Matlab, cu ajutorul careia s-a calculat eforturilor în serii Levy

% 1.INTRODUCEREA DATELOR INITIALE

clear all

format long

% Dimensiunile placii

a=6; b=6; h=0.15;

% Incarcarea pe m.p. de placa in kPa

qo=10;

% Fisii de actiune a incarcarii

x1=0; x2=a;

% Caracteristicile materialului

E=2.31*10^7; niu=0.2;

```

% Rigiditatea cilindrica a placii
D=E*h^3/(12*(1-niu^2));
% Coordonatele punctului in care se cere de calculat deplasarea,eforturile
x=0; y=1.5;
% 2.CALCULUL DEPLASARII W IN SERII INFINITE LEVY
m=1;
oldsum=-1;
w=0;
while w>oldsum;
    oldsum=w;
    alfa=m*pi/a;
    qm=2*qo*(cos(alfa*x1)-cos(alfa*x2))/(m*pi);
    wmq=qm/(D*alfa^4);
    C=cosh(alfa*b); S=sinh(alfa*b); k=alfa*b;
    Am=-wmq;
    Bm=((3+niu)*(1-niu)*C^2+2*niu*C-(1-niu^2)-niu*(1-niu)*k*S)*wmq/((3+niu)*(1-niu)*C^2+(1+niu)^2+((1-niu)^2)*k^2);
    Cm=((3+niu)*(1-niu)*C*S+niu*(1+niu)*S-niu*(1-niu)*k*C-k*(1-niu)^2)*wmq/((3+niu)*(1-niu)*C^2+(1+niu)^2+((1-
niu)^2)*k^2);
    Dm=-((3+niu)*(1-niu)*C*S+niu*(1+niu)*S-niu*(1-niu)*k*C-k*(1-niu)^2)*wmq/((3+niu)*(1-niu)*C^2+(1+niu)^2+((1-
niu)^2)*k^2);    w1=(Am*cosh(alfa*y)+Bm*alfa*y*sinh(alfa*y)+Cm*sinh(alfa*y)+Dm*alfa*y*cosh(alfa*y)+wmq)*sin(alfa*x);
    w=w+w1;
    m=m+1;
end
w
% 3. CALCULUL EFORTURILOR IN PLACA
% Calculul momentului de incovoiere Mx
m=1;
oldsum=-1;
Mx=0;
while Mx>oldsum;
    oldsum=Mx;
    alfa=m*pi/a;
    qm=2*qo*(cos(alfa*x1)-cos(alfa*x2))/(m*pi);
    wmq=qm/(D*alfa^4);
    C=cosh(alfa*b); S=sinh(alfa*b); k=alfa*b;
    Am=-wmq;
    Bm=((3+niu)*(1-niu)*C^2+2*niu*C-(1-niu^2)-niu*(1-niu)*k*S)*wmq/((3+niu)*(1-niu)*C^2+(1+niu)^2+((1-niu)^2)*k^2);
    Cm=((3+niu)*(1-niu)*C*S+niu*(1+niu)*S-niu*(1-niu)*k*C-k*(1-niu)^2)*wmq/((3+niu)*(1-niu)*C^2+(1+niu)^2+((1-
niu)^2)*k^2);
    Dm=-((3+niu)*(1-niu)*C*S+niu*(1+niu)*S-niu*(1-niu)*k*C-k*(1-niu)^2)*wmq/((3+niu)*(1-niu)*C^2+(1+niu)^2+((1-
niu)^2)*k^2);
    Mx1=D*alfa^2*sin(alfa*x)*(wmq + Am*cosh(alfa*y) + Cm*sinh(alfa*y) + Dm*alfa*y*cosh(alfa*y) + Bm*alfa*y*sinh(alfa*y)) -
D*niu*sin(alfa*x)*(2*Bm*alfa^2*cosh(alfa*y) + Cm*alfa^2*sinh(alfa*y) + 2*Dm*alfa^2*sinh(alfa*y) + Am*alfa^2*cosh(alfa*y)
+ Dm*alfa^3*y*cosh(alfa*y) + Bm*alfa^3*y*sinh(alfa*y));
    Mx=Mx+Mx1;
    m=m+1;
end
Mx

```

Remarcă: Celelalte eforturi M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y se vor scrie prin analogie

Concluzii: Funcția săgeții (11) arată că soluțiile obținute în baza seriilor trigonometrice simple sînt mai precise decît cele în serii duble; în cazul considerat $w(x,y)$ se aproximează prin serie trigonometrică numai într-o direcție. În cealaltă direcție soluția este precisă, deoarece este obținută din rezolvarea ecuației diferențiale (8). De menționat că convergența seriilor, precum și precizia de calcul va fi cu atît mai înaltă, cu cît mai precisă va fi prezentată forța exterioară $p(x,y)$ de dezvoltările după funcții trigonometrice. Din tabelul 1 se observă că devierile față de alte metode nu depășește 10-12% și asigură o precizie destul de mare.

Bibliografie

1. З. Кончковский *Плиты. Статические расчёты*, Москва 1984.
2. I. Crăciun, S. Cojemeachin *Calculul plăcilor. Încovoierea plăcilor subțiri*, Chișinău 2005.
3. S. Timoshenko, și S. Woinowski-Krieger *Teoria plăcilor plane și curbe*, București, 1968.
4. A. Caracostea *Manual pentru calculul construcțiilor*, București, 1977.